



# Filtres approchés pour un problème de filtrage non linéaire discret avec petit bruit d'observation

Paula Milheiro de Oliveira

## ► To cite this version:

Paula Milheiro de Oliveira. Filtres approchés pour un problème de filtrage non linéaire discret avec petit bruit d'observation. [Rapport de recherche] RR-1142, INRIA. 1989. inria-00075417

**HAL Id: inria-00075417**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075417>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
IRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 1142

*Programme 5*  
*Automatique, Productique,*  
*Traitement du Signal et des Données*

## **FILTRES APPROCHES POUR UN PROBLEME DE FILTRAGE NON LINEAIRE DISCRET AVEC PETIT BRUIT D'OBSERVATION**

**Paula MILHEIRO de OLIVEIRA**

**Décembre 1989**



★ R R - 1 1 4 2 ★

FILTRES APPROCHÉS POUR UN PROBLÈME DE  
FILTRAGE NON LINÉAIRE DISCRET AVEC PETIT  
BRUIT D'OBSERVATION (\*)

APROXIMATE FILTERS FOR A NONLINEAR DISCRETE  
TIME FILTERING PROBLEM WITH SMALL  
OBSERVATION NOISE (\*)

Paula Milheiro de Oliveira

INRIA Sophia-Antipolis

BP 109

06561 VALBONNE Cedex

(\*) Partiellement soutenu par USACCE dans le cadre du contrat DAJA 45-87-M-0296.

## Résumé

On fait une étude asymptotique d'un problème de filtrage non linéaire discret unidimensionnel, lorsqu'un certain paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0. On traite le cas d'un problème de filtrage non linéaire discret issu d'un problème continu avec petit bruit d'observation. Des filtres de dimension finie sont proposés et les estimations sur les performances de ces filtres sont énoncées et démontrées. On commence par faire une étude dans le cas linéaire, ce qui va nous inspirer les filtres approchés à prendre dans le cas général. Pour le résultat concernant l'erreur entre le filtre approché et le filtre optimal, la démonstration présentée utilisera des changements de probabilité et la dérivation par rapport à la condition initiale. Pour terminer, on présente des résultats d'application de ces filtres à un exemple et on constate que les propositions énoncées sont vérifiées numériquement.

## Abstract

We study the asymptotic behaviour of a non linear one-dimensional filtering discrete time problem, as some parameter  $\varepsilon$  tends to 0. We treat the case of a nonlinear discrete time problem coming from a continuous time one with small observation noise. Finite dimensional approximate filters are proposed and results concerning estimations of their performance are stated and proved. We present, at first, a brief study of the linear case and get the necessary inspiration to construct the approximate filters in the general case. The proof of the result we give concerning the error between the approximate filter and the optimal one will make use of probability changes and differentiation with respect to the initial condition. Finally, we present the results obtained when applying those filters to an example and we notice that the propositions previously stated are verified numerically.

# Table des matières

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Cas linéaire</b>                                                | <b>4</b>  |
| 2.1      | Calcul de quelques expressions utiles . . . . .                    | 5         |
| 2.2      | Filtre utilisant le gain stationnaire . . . . .                    | 9         |
| 2.3      | Filtres utilisant une approximation du gain stationnaire . . . . . | 12        |
| 2.3.1    | Approximations obtenues pour la covariance $p_s$ . . . . .         | 15        |
| 2.3.2    | Approximations obtenues pour le gain . . . . .                     | 17        |
| 2.4      | Récapitulatif . . . . .                                            | 20        |
| <b>3</b> | <b>Cas non linéaire</b>                                            | <b>22</b> |
| 3.1      | Le cas $\alpha > 1$ . . . . .                                      | 23        |
| 3.1.1    | Estimation de $X_k - M_k$ . . . . .                                | 24        |
| 3.1.2    | Estimation de $\hat{X}_k - M_k$ . . . . .                          | 25        |
| 3.1.3    | Estimation de l'erreur de filtrage . . . . .                       | 37        |
| 3.2      | Le cas $\alpha = 1$ . . . . .                                      | 37        |
| 3.2.1    | Estimation de $X_k - M_k$ . . . . .                                | 38        |
| 3.2.2    | Estimation de $\hat{X}_k - M_k$ . . . . .                          | 40        |
| 3.3      | Le cas $\alpha < 1$ . . . . .                                      | 46        |
| 3.4      | Récapitulatif . . . . .                                            | 48        |
| <b>4</b> | <b>Application numérique</b>                                       | <b>49</b> |
| <b>A</b> | <b>Version discrète du théorème de Girsanov</b>                    | <b>58</b> |
| <b>B</b> | <b>Estimation du premier terme dans l'expression (30)</b>          | <b>60</b> |

# 1 Introduction

On considère le problème de filtrage non linéaire en temps continu suivant :

On a un signal  $X$ , solution de l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dw_t^1, X_0 = \xi \quad (1)$$

et on dispose de l'observation unidimensionnelle vérifiant

$$dY_t = h(X_t)dt + \varepsilon dw_t^2, Y_0 = 0 \quad (2)$$

où  $w^1, w^2$  sont des processus de Wiener standards indépendants et  $\xi$  est une variable aléatoire indépendante de  $w^1$  et  $w^2$ . Le paramètre  $\varepsilon$  est supposé petit.

Le problème de filtrage consiste à calculer, pour toute fonction mesurable  $\phi$ , l'espérance conditionnelle de  $\phi(X_t)$ , étant donnée l'observation  $Y_s$  jusqu'à l'instant  $t$ .

On aimerait résoudre numériquement ce problème. Une possibilité est donnée par la résolution de l'équation de Zakai, une fois discretisée, ce qui a été étudié dans [Le Gland]. Cependant un tel calcul présente une grande complexité, puisqu'il s'agit, dans le cas général, d'une équation de dimension infinie. Une autre possibilité consiste à utiliser les filtres approchés proposés dans [Picard] et les discrétiser en temps. Ces filtres étant de dimension finie, le problème devient plus simple à résoudre. De plus, on y trouve des résultats concernant l'erreur de filtrage et en particulier ceux qui correspondent au filtre de Kalman étendu. La méthode de démonstration utilisée fait appel à des changements de probabilité, à la théorie de retournement du temps pour les diffusions et à des résultats sur les folts définis par des équations différentielles stochastiques. Dans [KBS] on peut trouver les premiers résultats sur ce genre de filtres, cependant leur justification reste purement formelle. Notons également que dans [Bensoussan], l'auteur considère le même problème de filtrage en temps continu et utilise une méthode autre que celle développée dans [Picard] pour démontrer les résultats asymptotiques.

En pratique, néanmoins, on ne dispose souvent que de l'observation à des instants discrets et, de plus, pour mener des calculs sur ordinateur, il est nécessaire de manipuler des processus discrets. Au lieu de discrétiser le filtre on peut penser à discrétiser le problème lui même. L'avantage de cette approche réside dans le fait que, dès qu'on se limite à des processus en temps discret, on n'a plus besoin de la théorie des folts ou du retournement du temps et même pas de l'intégrale d'Itô.

Cette idée a motivé l'étude qui suit, dans laquelle on recherche des filtres approchés pour un problème de filtrage non linéaire discret avec petit bruit

d'observation.

On considère la discrétisation la plus simple des équations (1) et (2):

$$X_{k+1} = X_k + b(X_k) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} w_{k+1}, \quad X_0 = \xi \quad (3)$$

$$y_k = h(X_k) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}} \bar{w}_k \quad (4)$$

où  $X_k$  est une approximation de  $X_{t_k}$  ( $t_k = k \Delta t$ ),  $\{w_k\}$  et  $\{\bar{w}_k\}$  sont des bruits blancs gaussiens standards indépendants et  $\xi$  une v.a. indépendante de  $\{w_k\}$  et  $\{\bar{w}_k\}$ . On se propose résoudre, de façon approchée, le problème de filtrage associé au système discret (3 - 4), où  $\Delta t$  est pris comme étant un paramètre dépendant de  $\varepsilon$ .

Soit  $\{\hat{X}_k\}$  le filtre optimal pour le problème discret, i.e.,

$$\hat{X}_k = E[X_k | Y_0^k], \quad Y_0^k = \sigma(y_i; i = 0, 1, \dots, k).$$

Puisque, dans le cas général, la détermination de  $\hat{X}_k$  présente une grande complexité, notre but sera de construire une "bonne approximation" de ce filtre représentant un compromis entre les coûts en temps de calcul et la précision des résultats. Si  $\varepsilon = 0$  et  $h$  est inversible, le signal est observé exactement:  $X_k = h^{-1}(y_k)$ . Pour  $\Delta t$  fixé, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'observation est faiblement bruitée et un "bon" filtre consistera à prendre tout simplement  $M_k = h^{-1}(y_k)$ . Cependant, notre intérêt portera sur des résultats asymptotiques: on fera tendre  $\Delta t$  vers 0 en même temps que  $\varepsilon$  et on donnera une approximation  $\{M_k\}$  du filtre optimal discret. On prendra  $\Delta t = \varepsilon^\alpha$  et on s'intéressera à l'estimation de  $|\hat{X}_k - M_k|$  quand  $\varepsilon$  devient "petit". Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on aura à distinguer 3 cas, selon la valeur de  $\alpha$ . Les cas  $\alpha > 1$ ,  $\alpha < 1$  et le cas intermédiaire  $\alpha = 1$  présentent un comportement différent. Quand  $\alpha$  est "grand" on doit pouvoir approcher le problème de filtrage en temps continu (1 - 2). En revanche, quand  $\Delta t$  est "trop grand" par rapport à  $\varepsilon$ , le système (3 - 4) ne sera plus nécessairement une "bonne discrétisation" du système en temps continu donc le filtre n'aura pas le même comportement.

On commencera par étudier le cas linéaire dans la section 2, on proposera des filtres approchés unidimensionnels possibles et des résultats asymptotiques sur leur "qualité". Cette étude nous suggèrera le filtre approché à considérer dans le cas non linéaire, ce qui est fait dans la section 3, et la généralisation des résultats asymptotiques de "qualité" du filtre est obtenue.

On s'intéressera en premier à l'estimation de  $X_k - M_k$ , ce qui nous ramène simplement à l'étude d'une suite récurrente. Ensuite, on procédera à l'estimation de  $\hat{X}_k - M_k$ . Dans le cas linéaire, puisqu'une équation pour  $\hat{X}_k$  est disponible (le filtre de Kalman-Bucy), l'étude d'une suite récurrente permet encore d'aboutir au résultat voulu. Par contre, dans le cas non linéaire, la méthode sera

toute autre: on commencera par introduire des changements de probabilités, on utilisera une version discrète du Théorème de Girsanov (voir annexe A) et, par dérivation par rapport à la condition initiale, on se ramènera à l'étude d'une expression asymptotique pour  $X_k - M_k$  dont on prendra l'espérance conditionnelle.

La section 3.4 contient un bref résumé sur les filtres approchés à considérer dans le cas non linéaire, selon la valeur de  $\alpha$ , et des résultats sur leur efficacité.

On termine cette étude par un essai numérique, présenté dans la section 4.

**Notation 1.1** *Dans la suite, on notera  $c$  n'importe quelle constante positive indépendante de  $\Delta t$  et de  $\varepsilon$ .*

*Remerciements:* J'aimerais remercier E. Pardoux, Professeur à l'Université de Provence, pour m'avoir suggéré ce travail et J. Picard, chargé de recherche à l'INRIA, pour les suggestions et discussions fructueuses qui m'ont permis d'avancer dans ce sujet.



## 2 Cas linéaire

On considère le système linéaire:

$$\begin{cases} X_{k+1} = (1 + b \Delta t) X_k + \sigma \sqrt{\Delta t} w_{k+1}, & X_0 = \xi \\ y_k = h X_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}} \bar{w}_k \end{cases} \quad (5)$$

où

- (H1)  $\{w_k\}$  et  $\{\bar{w}_k\}$  sont des bruits blancs gaussiens standard indépendants,
- (H2)  $\xi$  est une v.a. gaussienne indépendante de  $\{w_k\}$  et  $\{\bar{w}_k\}$ , de variance  $p_0$ , où  $p_0$  est une constante ne dépendant pas de  $\varepsilon$  ou de  $\Delta t$ .
- (H3)  $\sigma h > 0$ .

**Remarque 2.1** L'hypothèse (H3) peut, en fait, être remplacée par  $\sigma h \neq 0$  et, dans ce cas, on remplacera, dans les expressions du gain,  $\sigma h$  et  $\sigma/h$  par leurs valeurs absolues. Néanmoins l'hypothèse (H3) n'est pas plus restrictive que cette dernière, puisque si on remplace  $\sigma$  par  $-\sigma$  dans le système (5) on obtient des modèles équivalents.

Il est bien connu que, dans le cas linéaire, la loi conditionnelle de  $X_k$  sachant  $Y_0^k$  est gaussienne et l'estimation optimale est donc donnée par des équations en dimension finie, les équations du filtre de Kalman-Bucy:

$$\hat{X}_k = (1 + b \Delta t) \hat{X}_{k-1} + \frac{h \Delta t p_{k|k-1}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k|k-1}} (y_k - h(1 + b \Delta t) \hat{X}_{k-1}) \quad (6)$$

$$p_{k+1|k} = \frac{(1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^2 p_{k|k-1}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k|k-1}} + \sigma^2 \Delta t, \quad (7)$$

avec les notations:

$$p_k \triangleq E[(X_k - \hat{X}_k)^2], \quad \hat{X}_{k|k-1} \triangleq E[X_k | Y_0^{k-1}] \text{ et } p_{k|k-1} \triangleq E[(X_k - \hat{X}_{k|k-1})^2].$$

En outre,

$$p_k = \frac{\varepsilon^2 p_{k|k-1}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k|k-1}}. \quad (8)$$

Notre objectif est de construire un processus  $\{M_k\}$  qui approche  $\{\hat{X}_k\}$  et qui est plus simple à calculer que ce dernier. Dans ce but on commencera par étudier le gain stationnaire, pour passer en suite à la recherche d'une approximation de ce même gain, selon les différentes valeurs de  $\alpha$ . Le gain du filtre ayant un rapport avec la variance de l'erreur d'estimation on déduira simultanément des résultats sur cette deuxième quantité et ses approximations.

## 2.1 Calcul de quelques expressions utiles

Dans cette section on calcule certaines expressions qui nous seront nécessaires dans les sections suivantes.

### Calcul du gain stationnaire

On commence par déterminer la covariance de l'erreur de prédiction  $p_{k|k-1}$  dans une situation stationnaire, ce qui est équivalent à calculer la valeur stationnaire de la covariance de l'erreur d'estimation  $p_k$  (notée  $p_s^+$ ), puisqu'on passe de l'une à l'autre par l'expression (8).

On notera  $\theta_k$  le gain à l'instant  $t_k$  :

$$\theta_k \triangleq \frac{h \Delta t p_{k|k-1}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k|k-1}} = \frac{h \Delta t}{\varepsilon^2} p_k.$$

Soit  $p_s$  la valeur stationnaire de  $p_{k|k-1}$ , i.e. la solution de

$$p_s = \frac{(1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^2 p_s}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s} + \sigma^2 \Delta t.$$

On obtient

$$p_s = \frac{-[\varepsilon^2 - (1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^2 - \sigma^2 h^2 \Delta t^2] + \Delta t \rho(\varepsilon, \Delta t)}{2h^2 \Delta t},$$

où

$$\rho(\varepsilon, \Delta t) = \left[ [(2b + b^2 \Delta t) \varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \Delta t]^2 + 4\sigma^2 h^2 \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$p_s = \frac{(2b + b^2 \Delta t) \varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \Delta t + \rho(\varepsilon, \Delta t)}{2h^2}.$$

Le gain stationnaire sera donc,

$$\theta_s = \frac{h p_s \Delta t}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s} = \frac{h \Delta t}{\varepsilon^2} p_s^+.$$

### Le filtre approché

On considère un schéma qui résulte de (6) en remplaçant  $\theta_k$  par sa valeur stationnaire  $\theta_s$  ou, d'une façon plus générale, par une approximation de cette valeur. Dans la suite,  $\bar{\theta}$  désignera donc soit  $\theta_s$  soit une approximation de  $\theta_s$ .

On considère le processus  $\{M_k\}$  donné par l'expression

$$M_{k+1} = (1 + b \Delta t) M_k + \bar{\theta} (y_{k+1} - h(1 + b \Delta t) M_k), M_0 = m_0. \quad (9)$$

On obtient les résultats qui suivent.

Le premier résultat concerne les différences  $\theta_k - \theta_s$  et  $p_{k|k-1} - p_s$ .

**Lemme 2.2** Soit  $\eta_k \triangleq \theta_k - \theta_s$  et  $\mu_k \triangleq p_{k|k-1} - p_s$ . On a les expressions

$$\eta_{k+1} = \frac{h \Delta t \varepsilon^2}{[\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k+1|k}][\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s]} \mu_{k+1}$$

et

$$\mu_k = \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^k \frac{c_2}{c_1 \mu_0 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^i + c_2} \mu_0$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &\triangleq (1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^4 \\ c_1 &\triangleq h^2 \Delta t (\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s) \\ c_2 &\triangleq (\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s)^2. \end{aligned}$$

**Preuve** De la définition de  $\eta_k$  vient que

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \frac{h \Delta t p_{k+1|k}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k+1|k}} - \frac{h p_s \Delta t}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s} \\ &= \frac{h \Delta t [\varepsilon^2 p_{k+1|k} + h^2 \Delta t p_{k+1|k} p_s - \varepsilon^2 p_s - h^2 \Delta t p_{k+1|k} p_s]}{[\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k+1|k}][\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s]}, \end{aligned}$$

d'où l'expression de  $\eta_{k+1}$ .

Quand à  $\mu_k$ , on a la formule récursive

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= \frac{(1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^2 p_{k|k-1}}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_{k|k-1}} - \frac{(1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^2 p_s}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s} \\ &= \frac{(1 + b \Delta t)^2 \varepsilon^4}{[\varepsilon^2 + h^2 \Delta t \mu_k + h^2 \Delta t p_s][\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s]} \mu_k \\ &= \frac{c_0}{c_1 \mu_k + c_2} \mu_k. \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_{k+1} = \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{\mu_k + \frac{c_2}{c_1}} \mu_k. \quad (10)$$

Suivant un raisonnement par récurrence on trouve l'expression:

$$\mu_k = \frac{c_0^k}{c_1 \mu_0 \sum_{i=0}^{k-1} c_2^{k-1-i} c_0^i + c_2^k} \mu_0 = \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^k \frac{c_2}{c_1 \mu_0 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^i + c_2} \mu_0$$

■

**Lemme 2.3** Soit  $\bar{\eta}_k \triangleq \theta_k - \bar{\theta}$ . On a l'égalité

$$\begin{aligned} E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] &= (1 + b \Delta t)^2 (1 - h \bar{\theta})^2 E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \\ &\quad + \bar{\eta}_{k+1}^2 [h^2 p_{k+1|k} + \frac{\varepsilon^2}{\Delta t}], \end{aligned}$$

où

$$1 - h \bar{\theta} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + h^2 \Delta t p_s} + h(\theta_s - \bar{\theta}).$$

**Preuve** D'après les expressions (6) et (9),

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} - M_{k+1} &= (1 + b \Delta t) \hat{X}_k + \theta_{k+1}(y_{k+1} - h(1 + b \Delta t) \hat{X}_k) - (1 + b \Delta t) M_k \\ &\quad - \bar{\theta}(y_{k+1} - h(1 + b \Delta t) M_k) \\ &= (1 + b \Delta t)(\hat{X}_k - M_k) + (\theta_{k+1} - \bar{\theta}) y_{k+1} \\ &\quad - h(1 + b \Delta t)(\theta_{k+1} \hat{X}_k - \bar{\theta} M_k) \end{aligned}$$

Étant donné que  $\theta_{k+1} = \bar{\theta} + (\theta_{k+1} - \bar{\theta})$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} - M_{k+1} &= (1 + b \Delta t)(1 - h \bar{\theta})(\hat{X}_k - M_k) \\ &\quad + (\theta_{k+1} - \bar{\theta})(y_{k+1} - h(1 + b \Delta t) \hat{X}_k), \end{aligned}$$

où  $y_{k+1} - h(1 + b \Delta t) \hat{X}_k \triangleq \nu_k$  est l'innovation ( $\nu_k$  indépendant de  $Y_0^k$ ) et

$$E \nu_k^2 = h^2 p_{k+1|k} + \frac{\varepsilon^2}{\Delta t},$$

d'où le lemme. ■

**Expressions asymptotiques de  $E[(X_k - \hat{X}_k)^2]$  et de  $E[(\hat{X}_k - M_k)^2]$  quand le pas de temps est  $\varepsilon^\alpha$**

On prendra dans la suite  $\Delta t = \varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Notre but est de faire une discussion sur l'ordre de grandeur de l'erreur associée au schéma (9), pour les différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Remarque 2.4** On rappelle que :

$$p_s = \frac{(2b + b^2 \Delta t) \varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \Delta t + \rho_\alpha(\varepsilon, \Delta t)}{2h^2}$$

où

$$\rho_\alpha(\varepsilon) \triangleq [((2b + b^2 \Delta t) \varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \Delta t)^2 + 4 \sigma^2 h^2 \varepsilon^2]^{1/2}$$

Donc

$$c(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon) \leq p_s \leq c(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon)$$

Alors, puisque  $\mu_0 \geq 0$  (i.e. la valeur initiale de la covariance,  $p_0$ , est une constante indépendante de  $\varepsilon$ ), des calculs précédents il vient que :

$$0 \leq \mu_k \leq \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^k \mu_0 ,$$

où

$$\frac{c_0}{c_2} = \frac{(1 + b\varepsilon^\alpha)^2 \varepsilon^4}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^2} < 1,$$

i.e.  $c_0 < c_2$ , puisque

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c_0}{c_2} &= \frac{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s - (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^2} \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha [h^2 p_s - b\varepsilon^2][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^2} > 0, \\ &\text{pour } \varepsilon \text{ "assez petit"}. \end{aligned}$$

On établit la proposition suivante:

**Proposition 2.5** *On a l'estimation*

$$E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2] \leq \begin{cases} c \exp\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\} + c\varepsilon, & \text{si } \alpha \geq 1 \\ c \exp\{[4 \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}(1 - \alpha) + 2(1 - \alpha)] \log \varepsilon\}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

**Preuve**

Par définition,

$$\begin{aligned} E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2] &\triangleq p_{k+1} = \frac{\varepsilon^2 (\mu_{k+1} + p_s)}{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^2 (\mu_{k+1} + p_s)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s} \mu_{k+1} + \frac{\varepsilon^2 p_s}{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s} \\ &\leq \begin{cases} c (c_0/c_2)^{k+1} + c\varepsilon, & \text{si } \alpha \geq 1 \\ c \varepsilon^{2(1-\alpha)} (c_0/c_2)^{k+1} + c \varepsilon^{2-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où la proposition. ■

D'autre part, du lemme 2.3, on obtient:

**Lemme 2.6** *On a l'estimation*

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq \sum_{i=0}^{k+1} (1 - \bar{A})^{k+1-i} B_i ,$$

où

$$\begin{aligned} \bar{A} &\triangleq 1 - (1 + b\varepsilon^\alpha)^2 (1 - h\bar{\theta})^2 \\ B_{k+1} &\triangleq \bar{\eta}_{k+1}^2 \frac{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{k+1|k}}{\varepsilon^\alpha} \\ B_0 &\triangleq E[(\hat{X}_0 - M_0)^2]. \end{aligned}$$

**Preuve** Le lemme 2.3 devient:

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] = (1 - \bar{A}) E[(\hat{X}_k - M_k)^2] + B_{k+1} .$$

■

## 2.2 Filtre utilisant le gain stationnaire

On prend comme approximation du gain  $\theta_k$  le gain stationnaire  $\theta_s$ , i.e.  $\bar{\theta} \equiv \theta_s$  (voir le schéma (9)). On déduira par la suite des résultats pour d'autres types d'approximations  $\bar{\theta}$  à préciser.

Dans ce cas, on obtient:

**Proposition 2.7** *Pour le schéma (9) avec  $\bar{\theta} = \theta_s$ , on a l'estimation*

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq \begin{cases} c \exp\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\} , & \text{si } \alpha \geq 1 \\ c \exp\{4 \frac{t_{k+1}}{\varepsilon} (1 - \alpha) \log \varepsilon\} , & \text{si } \alpha < 1 . \end{cases}$$

**Preuve** Suivant les notations du lemme 2.6,

$$\begin{aligned} 1 - \bar{A} &= (1 + b\varepsilon^\alpha)^2 (1 - h\theta_s)^2 \\ &= \frac{(1 + b\varepsilon^\alpha)^2 \varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s)^2} \\ &\equiv \frac{c_0}{c_2} \\ B_{i+1} &= \eta_{i+1}^2 \frac{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{i+1|i}}{\varepsilon^\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{h \varepsilon^{\alpha+2}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{i+1|i}][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]} \mu_{i+1} \right]^2 \frac{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{i+1|i}}{\varepsilon^\alpha} \\
&= \frac{h^2 \varepsilon^{\alpha+4}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{i+1|i}][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^2} \mu_{i+1}^2
\end{aligned}$$

et, puisque  $p_{i+1|i} \geq p_s$ , on a la majoration

$$B_{i+1} \leq \frac{h^2 \varepsilon^{\alpha+4}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^3} \mu_{i+1}^2 = B \mu_{i+1}^2 ,$$

où

$$B \triangleq \frac{h^2 \varepsilon^{\alpha+4}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s]^3}$$

et

$$\mu_{i+1}^2 = [(1-A)^2]^{i+1} H_{i+1} \mu_0^2 ,$$

où

$$H_{i+1} \triangleq \frac{c_2^2}{\left[ c_1 \mu_0 \sum_{j=0}^i (c_0/c_2)^j + c_2 \right]^2}$$

et  $H_0$  est tel que

$$E[(\hat{X}_0 - M_0)^2] = B H_0 \mu_0^2 .$$

D'après ce lemme,

$$\begin{aligned}
E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] &\leq (c_0/c_2) E[(\hat{X}_k - M_k)^2] + B[(c_0/c_2)^2]^{k+1} H_{k+1} \mu_0^2 \\
&\leq \sum_{i=0}^{k+1} (c_0/c_2)^{k+1-i} B[(c_0/c_2)^2]^i H_i \mu_0^2 \\
&= \mu_0^2 B (c_0/c_2)^{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} (c_0/c_2)^i H_i
\end{aligned} \tag{11}$$

On cherche maintenant un majorant pour la série  $\left( \sum_{i=0}^k (c_0/c_2)^i H_i \right)_k$ .

Or,

$$\begin{aligned}
H_{i+1} &= \frac{c_2^2}{\left[ c_1 \mu_0 \frac{1 - (c_0/c_2)^{i+1}}{1 - c_0/c_2} + c_2 \right]^2} , \quad \text{avec} \quad \frac{c_0}{c_2} < 1 \\
&= \left( \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \right)^2 \frac{1}{\left[ \left( 1 + \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \right) - (c_0/c_2)^{i+1} \right]^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{k+1} (c_0/c_2)^i H_i = \left( \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \right)^2 \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(c_0/c_2)^i}{[1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0) - (c_0/c_2)^i]^2}$$

On commence par calculer l'ordre de grandeur de  $\frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0}$ .

$$\frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} = \frac{(\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s)^2 - (1 + b \varepsilon^\alpha)^2 \varepsilon^4}{\mu_0 h^2 \varepsilon^\alpha (\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s)}$$

Soit  $Num$  le numérateur du membre à droite dans cette expression:

$$\begin{aligned} Num &\triangleq (\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s)^2 - (1 + b \varepsilon^\alpha)^2 \varepsilon^4 \\ &= h^2 \varepsilon^\alpha (p_s - \frac{b}{h^2} \varepsilon^2) [\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s + (1 + b \varepsilon^\alpha) \varepsilon^2] \end{aligned}$$

Or  $p_s - \frac{b}{h^2} \varepsilon^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon)$ , ce qui entraîne  $Num = \mathcal{O}(\varepsilon^{4\alpha} \vee \varepsilon^{\alpha+3})$  et donc

$$\frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon).$$

De plus

$$\frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} > 0.$$

On peut faire la majoration suivante:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(c_0/c_2)^i}{[1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0) - (c_0/c_2)^i]^2} \\ &\leq \int_0^\infty \frac{(c_0/c_2)^x}{[1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0) - (c_0/c_2)^x]^2} dx \\ &= \frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \frac{1}{[1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)](c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{k+1} (c_0/c_2)^i H_i \leq \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \frac{1}{1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} + H_0$$

De l'expression (11), il vient alors que

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq \mu_0^2 B(c_0/c_2)^{k+1} \left( \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \frac{1}{1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} + H_0 \right).$$



Etant donné que

$$B = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}), & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{4(1-\alpha)}), & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

et

$$\frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \leq \frac{1}{1 - (c_0/c_2)} = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^{-(\alpha-1)}), & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \mathcal{O}(1), & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

on obtient:

$$B \frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \frac{1}{1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} + H_0 \leq \begin{cases} c, & \text{si } \alpha \geq 1 \\ c(\varepsilon^{4(1-\alpha)}), & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \quad (12)$$

et

$$BH_0 = \frac{1}{\mu_0^2} E[(\hat{X}_0 - M_0)^2].$$

Donc,

- si  $\alpha \geq 1$ , puisque  $1 - c_0/c_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})$ , on a l'estimation

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\right\},$$

- si  $\alpha < 1$ , puisque  $c_0/c_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{4(1-\alpha)})$ , on a l'estimation

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{\left[4\left(\frac{t_{k+1}}{\varepsilon} + 1\right)(1 - \alpha)\right] \log \varepsilon\right\}.$$

■

**Remarque 2.8** On peut constater que, quel que soit  $\alpha > 0$ , les valeurs stationnaires de  $E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2]$  et  $E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2]$  sont du même ordre de grandeur donc l'utilisation du filtre approché (voir le schéma (9)) est justifiée.

### 2.3 Filtres utilisant une approximation du gain stationnaire

On cherche maintenant les expressions plus générales qu'on obtient quand on utilise une approximation  $\bar{\theta}$  du gain asymptotique  $\theta_s$ .

Pour la construction de cette approximation on va d'abord considérer des approximations pour la covariance  $p_s$ . Elles conduisent naturellement à des approximations pour le gain  $\theta_s$ .

On va estimer l'erreur  $X_k - M_k$ .

**Proposition 2.9** *Supposons que  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^m)$ ,  $m > 1$ , i.e.  $\bar{p}$  est une approximation de  $p_s$  d'ordre  $\varepsilon^m$ .*

*Alors,*

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq \begin{cases} c \exp\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^{2m-1}, & \text{si } \alpha \geq 1 \\ c \exp\{4 \frac{t_{k+1}}{\varepsilon} (1 - \alpha) \log \varepsilon\} + c \varepsilon^{2m+4-5\alpha}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

**Preuve** D'après le lemme 2.6, on a l'estimation

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq \sum_{i=0}^{k+1} (1 - \bar{A})^{k+1-i} B_i,$$

où

$$1 - \bar{A} = \frac{(1 + b \varepsilon^\alpha)^2 \varepsilon^4}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p}]^2}$$

et

$$B_i = \bar{\eta}_i^2 \frac{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{i|i-1}}{\varepsilon^\alpha} \leq \bar{B} \bar{\mu}_i^2,$$

avec

$$\bar{B} \triangleq \frac{h^2 \varepsilon^{\alpha+4}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p}]^2}$$

et

$$\bar{\mu}_i = \mu_i + (p_s - \bar{p}).$$

Donc

$$\begin{aligned} E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] &\leq \bar{B} \sum_{i=0}^{k+1} (1 - \bar{A})^{k+1-i} [\mu_i + c \varepsilon^m]^2 \\ &\leq 2\bar{B} \sum_{i=0}^{k+1} (1 - \bar{A})^{k+1-i} \mu_i^2 + c \varepsilon^{2m} \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \end{aligned}$$

En utilisant les majorations dans la démonstration de la proposition 2.7, on obtient:

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq 2\bar{B} \mu_0^2 (1 - \bar{A})^{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \left[ \frac{(c_0/c_2)^2}{1 - \bar{A}} \right]^i H_i + c \varepsilon^{2m} \frac{\bar{B}}{\bar{A}}.$$

Maintenant, si  $p_s - \bar{p} \geq 0$  alors  $1 - \bar{A} \geq c_0/c_2$ ; par contre, si  $p_s - \bar{p} \leq 0$  alors  $1 - \bar{A} \leq c_0/c_2$ . Par conséquence, on a

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\bar{B}\mu_0^2 [(1-\bar{A}) \vee (c_0/c_2)]^{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} (c_0/c_2)^i H_i + c\varepsilon^{2m} \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \\
&\leq 2\bar{B}\mu_0^2 [(1-\bar{A}) \vee (c_0/c_2)]^{k+1} \left( \frac{c_2 - c_0}{c_1 \mu_0} \frac{-1}{\log(c_0/c_2)} \frac{1}{1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} + H_0 \right) \\
&\quad + c\varepsilon^{2m} \frac{\bar{B}}{\bar{A}}
\end{aligned}$$

Quelques calculs nous donnent:

$$\begin{aligned}
&\bar{B} \frac{(c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)}{1 + (c_2 - c_0)/(c_1 \mu_0)} \\
&= \frac{h^2 \varepsilon^{\alpha+4}}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p}]^2} \\
&\quad \cdot \frac{(p_s - b/h^2 \varepsilon^2)[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]}{\mu_0 (\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s) + (p_s - b/h^2 \varepsilon^2)[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]} \\
&= \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}), & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{4(\alpha-1)}), & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \\
\bar{A} &= \frac{\varepsilon^\alpha [h^2 \bar{p} - b\varepsilon^2][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p} + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p}]^2}, \\
&\quad \text{où } h^2 \bar{p} - b\varepsilon^2 \leq c(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon) \\
&= \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}), & \alpha \geq 1 \\ \mathcal{O}(1), & \alpha < 1 \end{cases} \\
\frac{\bar{B}}{\bar{A}} &= \frac{h^2 \varepsilon^4}{[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_s][h^2 \bar{p} - b\varepsilon^2][\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p} + (1 + b\varepsilon^\alpha) \varepsilon^2]} \\
&= \begin{cases} \mathcal{O}(1/\varepsilon), & \alpha \geq 1 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{4-5\alpha}), & \alpha < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient donc les estimations suivantes:

- si  $\alpha \geq 1$ ,

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\right\} + c\varepsilon^{2m-1}$$

- si  $\alpha < 1$ , puisque  $1 - \bar{A} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{4(1-\alpha)})$ ,

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{4 \frac{t_{k+1}}{\varepsilon} (1 - \alpha) \log \varepsilon\right\} + c\varepsilon^{2m+4-5\alpha}$$

■

### 2.3.1 Approximations obtenues pour la covariance $p_s$

On utilise un développement limité de  $\rho_\alpha(\varepsilon)$  pour construire une approximation  $\bar{p}$  de  $p_s$  et on obtient donc une approximation  $\bar{\theta}$  de  $\theta_s$ , par  $\bar{\theta} = \frac{h \bar{p} \varepsilon^\alpha}{\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha \bar{p}}$ .

On explicite quelques expressions possibles pour l'approximation de la variance  $\bar{p}$ :

Puisque, par hypothèse,  $\sigma h > 0$ , on a que

- (a) si  $\alpha \geq 2$ , le développement de Taylor de  $\rho_\alpha(\varepsilon)$  nous donne, après quelques calculs,

$$\rho_\alpha(\varepsilon) = 2 h \sigma \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

et donc

$$p_s = \frac{\sigma}{h} \varepsilon + \frac{b}{h^2} \varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Si on prend, par exemple,

1.  $\boxed{\bar{p} = \sigma/h \varepsilon}$ , i.e.  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^3. \quad (13)$$

2.  $\boxed{\bar{p} = \sigma/h \varepsilon + b/h^2 \varepsilon^2}$  si  $\alpha \neq 2$ , i.e.  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon^3)$ , alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c(\varepsilon^{2\alpha-1} \vee \varepsilon^5).$$

3.  $\boxed{\bar{p} = \sigma/h \varepsilon + b/h^2 \varepsilon^2 + \sigma^2/2 \varepsilon^\alpha}$  si  $2 \leq \alpha < 3$ , i.e.  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^5.$$

- (b) si  $1 < \alpha \leq 2$ , du développement limité de  $\rho_\alpha(\varepsilon)$  il résulte que

$$p_s = \frac{\sigma}{h} \varepsilon + \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \vee \varepsilon^{2\alpha-1}) \quad (14)$$

donc on peut prendre comme approximation de  $p_s$ , par exemple:

1.  $\boxed{\bar{p} = \sigma/h \varepsilon}$ , i.e.,  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$  et alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^{2\alpha-1}$$

2.  $\boxed{\bar{p} = \sigma/h\varepsilon + \sigma^2/2\varepsilon^\alpha}$ , i.e.,  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^2 \vee \varepsilon^{2\alpha-1})$  et alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c(\varepsilon^3 \vee \varepsilon^{4\alpha-3})$$

(c) si  $\alpha = 1$ , le développement limité de  $\rho_\alpha(\varepsilon)$  est un peu particulier:

$$\rho_\alpha(\varepsilon) = \sigma h \sqrt{4 + \sigma^2 h^2} \varepsilon + \frac{2 b \sigma h}{\sqrt{4 + \sigma^2 h^2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

ce qui entraîne:

$$\begin{aligned} p_s &= \left( \frac{\sigma}{h} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2 h^2}{4}} + \frac{\sigma^2}{2} \right) \varepsilon + \left( \frac{b}{h^2} + \frac{b \sigma}{2 h \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4}} \right) \varepsilon^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On propose, par exemple, les approximations suivantes:

1.  $\boxed{\bar{p} = (\sigma/h \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4} + \sigma^2/2) \varepsilon}$ , i.e.  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^3$$

2.  $\boxed{\bar{p} = (\sigma/h \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4} + \sigma^2/2) \varepsilon + (b/h^2 + \frac{b \sigma}{2 h \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4}}) \varepsilon^2}$ , i.e.  
 $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$  et alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^5.$$

(d) si  $0 < \alpha < 1$ , le développement de la fonction  $\rho_\alpha(\varepsilon)$  devient

$$\rho_\alpha(\varepsilon) = \sigma^2 h^2 \varepsilon^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha})$$

d'où

$$p_s = \sigma^2 \varepsilon^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha}).$$

Donc, si on prend  $\boxed{\bar{p} = \sigma^2 \varepsilon^\alpha}$ , i.e.  $p_s - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha})$ , alors

$$E[(\hat{X}_k - M_k)^2] \leq c \exp\{4 \frac{t_{k+1}}{\varepsilon} (1 - \alpha) \log \varepsilon\} + c \varepsilon^{8-7\alpha}.$$

### 2.3.2 Approximations obtenues pour le gain

Puisque notre intérêt porte sur la construction de schémas du type du schéma (9), on essaie de décrire une approximation du gain stationnaire  $\theta_s$ . En fait ces approximations peuvent aussi être obtenues directement d'après le développement de  $\rho_\alpha(\varepsilon)$ , sans passer par l'approximation de la variance.

On a

$$\theta_s = \frac{1}{h} \frac{1}{1 + D_0}$$

où

$$D_0 \triangleq \frac{2\varepsilon^{2-\alpha}}{(2b + b^2\varepsilon^\alpha)\varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \varepsilon^\alpha + \rho_\alpha(\varepsilon)}$$

et

$$\rho_\alpha(\varepsilon) \geq c(\varepsilon^\alpha \vee \varepsilon).$$

• *Premier cas:  $\alpha > 1$*

$$D_0 \approx \frac{1}{h\sigma\varepsilon^{\alpha-1}},$$

puisque  $\rho_\alpha(\varepsilon) = 2h\sigma\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \vee \varepsilon^{2\alpha-1})$ .

Une approximation de  $\theta_s$  est donc

$$\boxed{\bar{\theta} = \sigma\varepsilon^{\alpha-1}}. \quad (15)$$

**Proposition 2.10** *Si  $\alpha > 1$ , avec le gain approché donné par (15),*

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\right\} + c(\varepsilon^{2\alpha-1} \vee \varepsilon^3)$$

**Preuve** Puisque

$$\bar{\theta} = \frac{h\bar{p}\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^2 + h^2\varepsilon^\alpha\bar{p}}$$

et, dans notre cas,

$$\bar{p} = \frac{\sigma\varepsilon}{h(1 - \sigma h\varepsilon^{\alpha-1})},$$

on obtient, en utilisant le développement limité de  $\frac{1}{1 - \sigma h\varepsilon^{\alpha-1}}$ ,

$$\bar{p} = \frac{\sigma}{h}\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^\alpha + \sigma^3 h\varepsilon^{2\alpha-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3\alpha-2})$$

d'où

$$p_s - \bar{p} = c(\varepsilon^2 \vee \varepsilon^\alpha) \text{ et, si } \alpha > 2, p_s - \bar{p} > 0.$$

Donc, de la proposition 2.9, on déduit les estimations suivantes:

pour  $1 < \alpha \leq 2$ ,

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^{2\alpha-1}$$

pour  $\alpha \geq 2$ ,

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^3.$$

■

**Remarque 2.11** Une fois encore on trouve des estimations de  $E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2]$  d'ordre inférieur ou égal à celui de  $E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2]$ .

**Remarque 2.12** Le schéma correspondant aux approximations (13) et (14) (i.e. qui utilise le gain  $\bar{\theta} = \frac{\sigma \varepsilon^{\alpha+1}}{\varepsilon^2 + \sigma h \varepsilon^{\alpha+1}}$ ) n'a pas d'intérêt pratique, puisque son utilisation oblige à un calcul plus compliqué que celui du schéma qu'on vient d'obtenir alors que l'ordre de l'erreur associée reste le même.

• *Deuxième cas :  $\alpha < 1$*

$$D_0 \approx \frac{2}{h^2 \sigma^2} \varepsilon^{2(1-\alpha)}.$$

Donc une approximation du gain stationnaire  $\theta_s$  est

$$\boxed{\bar{\theta} = \frac{1}{h}}.$$

Le schéma (9) devient alors

$$M_{k+1} = \frac{1}{h} y_{k+1} \tag{16}$$

• *Troisième cas :  $\alpha = 1$*

$$D_0 \approx \frac{2}{\sigma h \sqrt{4 + \sigma^2 h^2}} \varepsilon.$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , une approximation de  $\theta_s$  est encore

$$\boxed{\bar{\theta} = \frac{1}{h}}$$

et on retrouve le schéma (16).

**Proposition 2.13** Si  $\alpha \leq 1$ , pour un tel schéma, on a:

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] = \mathcal{O}(\varepsilon^{4-3\alpha}).$$

et

$$E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2] = \frac{1}{h^2} \varepsilon^{2-\alpha}.$$

### Preuve

i) D'après le lemme 2.3,

$$\hat{X}_{k+1} - M_{k+1} = -\frac{\varepsilon^2}{h[\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{k+1|k}]}(y_{k+1} - h(1 + b\varepsilon^\alpha)M_k)$$

donc

$$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2] = -\frac{\varepsilon^4}{h^2 \varepsilon^\alpha [\varepsilon^2 + h^2 \varepsilon^\alpha p_{k+1|k}]}$$

d'où la première expression.

ii) D'autre part,

$$X_{k+1} - M_{k+1} = -\frac{\varepsilon}{h \varepsilon^{\alpha/2}} \bar{w}_{k+1}^2,$$

d'où la deuxième expression dans la proposition.

■



## 2.4 Récapitulatif

Les tableaux suivants nous donnent les vitesses de convergence à 0 de l'erreur quadratique moyenne pour les différents filtres approchés qui ont fait l'objet de cet étude, mettant en évidence la dépendance de ces filtres selon le rapport de la variance du bruit d'observation par le pas de temps.

- Pour  $\alpha > 1$

| gain du filtre approché                                                                                                                                                                                                                         | estimation de l'erreur<br>$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2]$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\theta_s$ (gain stationnaire)                                                                                                                                                                                                                  | $c e^{-ct_{k+1}/\varepsilon}$                              |
| $\sigma \varepsilon^{\alpha-1}$                                                                                                                                                                                                                 | $c(\varepsilon^{2\alpha-1} \vee \varepsilon^3)$            |
| $1 < \alpha \leq 2$ $\frac{\sigma \varepsilon^{\alpha+1} + \sigma^2 h/2 \varepsilon^{2\alpha}}{\varepsilon^2 + \sigma h \varepsilon^{\alpha+1} + \sigma^2 h^2/2 \varepsilon^{2\alpha}}$                                                         | $c(\varepsilon^3 \vee \varepsilon^{4\alpha-3})$            |
| $\alpha > 2$ $\frac{\sigma \varepsilon^{\alpha+1} + b/h \varepsilon^{\alpha+2}}{\varepsilon^2 + \sigma h \varepsilon^{\alpha+1} + b \varepsilon^{\alpha+2}}$                                                                                    | $c(\varepsilon^{2\alpha-1} \vee \varepsilon^5)$            |
| $2 \leq \alpha < 3$ $\frac{\sigma \varepsilon^{\alpha+1} + b/h \varepsilon^{\alpha+2} + \sigma^2 h/2 \varepsilon^{2\alpha}}{\varepsilon^2 + \sigma h \varepsilon^{\alpha+1} + b \varepsilon^{\alpha+2} + \sigma^2 h^2/2 \varepsilon^{2\alpha}}$ | $c \varepsilon^5$                                          |

D'autre part, on a:

$$E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2] \leq c e^{-ct_{k+1}/\varepsilon} + c \varepsilon.$$

- Pour  $\alpha = 1$

| gain du filtre approché                                                                                                                                                                                                                                                                      | estimation de l'erreur<br>$E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2]$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\theta_s$ (gain stationnaire)                                                                                                                                                                                                                                                               | $c e^{-ct_{k+1}/\varepsilon}$                              |
| $\frac{1}{h}$                                                                                                                                                                                                                                                                                | $c \varepsilon$                                            |
| $\frac{\sigma \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4} + \sigma^2 h/2}{1 + h(\sigma \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4} + \sigma^2 h/2)}$                                                                                                                                                                             | $c \varepsilon^3$                                          |
| $\frac{\sigma \sqrt{1 + \frac{\sigma^2 h^2}{4}} + \frac{\sigma^2 h}{2} + (\frac{b}{h} + \frac{b \sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4}}) \varepsilon}{1 + h(\sigma \sqrt{1 + \frac{\sigma^2 h^2}{4}} + \frac{\sigma^2 h}{2}) + (b + \frac{b \sigma h}{2 \sqrt{1 + \sigma^2 h^2/4}}) \varepsilon}$ | $c \varepsilon^5$                                          |

D'autre part, on a:

$$E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2] \leq c e^{-ct_{k+1}/\varepsilon} + c\varepsilon .$$

- Pour  $\alpha < 1$

| <i>gain du filtre approché</i>                                                                | <i>estimation de l'erreur</i>                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta_s$ (gain stationnaire)                                                                | $E[(\hat{X}_{k+1} - M_{k+1})^2]$<br>$c e^{ct_{k+1}/\varepsilon (1-\alpha) \log \varepsilon}$ |
| $\frac{1}{h}$                                                                                 | $c \varepsilon^{4-3\alpha}$                                                                  |
| $\frac{\sigma^2 h \varepsilon^{2\alpha}}{\varepsilon^2 + \sigma^2 h^2 \varepsilon^{2\alpha}}$ | $c e^{4t_{k+1}/\varepsilon (1-\alpha) \log \varepsilon} + c \varepsilon^{8-7\alpha}$         |

D'autre part, on a:

$$E[(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2] \leq c e^{[4t_{k+1}/\varepsilon (1-\alpha) + 2(1-\alpha)] \log \varepsilon} + c \varepsilon^{2-\alpha} .$$

**Remarque 2.14** Des calculs analogues nous permettent aussi d'estimer directement  $X_k - M_k$ .

### 3 Cas non linéaire

On suppose maintenant que les fonctions  $b$  et  $h$  sont non linéaires.

On considère le système décrit par les équations

$$\begin{cases} X_{k+1} &= X_k + b(X_k) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} w_{k+1}, \quad X_0 = \xi \\ y_k &= h(X_k) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}} \bar{w}_k \end{cases} \quad (17)$$

où

(H2')  $\xi$  est une v.a. de loi de probabilité  $p_0$  telle que:

$$p_0 \in C^1, \quad \int \left| \frac{p'_0}{p_0} \right|^r p_0(x) dx < \infty.$$

Pour des raisons liées à l'application d'une méthode de changement de probabilités, pour obtenir les estimations de l'erreur quadratique moyenne, il sera plus commode de considérer notre observation sous la forme suivante:

$$\bar{y}_{k+1} = h(X_k) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}} v_{k+1}, \quad (18)$$

où  $\{v_k\}$  est un bruit blanc gaussien standard indépendant de  $\{w_k\}$ .

Formellement, l'observation  $\bar{y}_{k+1}$  contient la même information que l'observation  $y_k$ .

On suppose que  $\bar{Y}_1^k$  est la tribu des observations jusqu'à l'instant  $t_k$ :

$$\bar{Y}_1^k = \sigma(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k),$$

i.e.  $\bar{Y}_1^k = Y_0^{k-1}$ .

On veut étudier la "qualité" de l'approximation

$$M_{k+1} = M_k + b(M_k) \Delta t + \bar{\theta}(\bar{y}_{k+1} - h(M_k)), \quad M_0 = m_0, \quad (19)$$

correspondante à une étape de prévision:  $\hat{X}_k = E[X_k | \bar{Y}_1^k]$ .

Des résultats qu'on obtiendra sur l'erreur de prédiction  $X_k - M_k$  on déduira immédiatement les résultats équivalents sur l'erreur de filtrage, puisque, voir le paragraphe 3.1.3, on a que

$$|\hat{X}_k - \tilde{X}_k| \leq c \Delta t,$$

où  $\tilde{X}_k = E[X_{k-1} | \bar{Y}_1^k]$ .

Pour la construction du filtre approché on va s'inspirer de l'étude du cas linéaire et ainsi choisir une approximation du gain. L'estimation de  $X_k - M_k$  sera obtenue à partir de l'étude d'une suite récurrente. Par contre, pour estimer  $\hat{X}_k - M_k$ , on introduira d'abord deux changements de probabilités et on obtiendra une expression asymptotique pour  $X_k - M_k$  qui fait intervenir les dérivées de  $X$  par rapport à la condition initiale. Sur cette expression, on conditionnera les différents termes par rapport à la tribu  $\bar{Y}_1^k$  des observations et on procédera à des estimations. Selon la valeur de  $\alpha$ , les changements de probabilités choisis seront différents et on aboutira, évidemment, à des expressions asymptotiques différentes pour  $X_k - M_k$ . Dans une première section on étudie le cas  $\alpha > 1$  (section 3.1) et en suite le cas  $\alpha = 1$  (section 3.2). Le cas  $\alpha < 1$  offrant certaines difficultés dans l'application de cette méthode de démonstration, on se limitera à faire une remarque proposant un filtre approché "performant".

**Hypothèses:** En plus des hypothèses (H1) et (H2') on suppose que:

(H3')  $h$  est une fonction  $C^3$  à dérivées bornées et  $\|\sigma h'\| \geq \sigma h'(x) \geq c_h > 0$ ,  $\forall x$ .

(H4)  $b$  est une fonction  $C^2$  à dérivées bornées,  $|b'(x)| \leq \|b'\|$ ,  $\forall x$ .

(H5)  $\Delta t = \varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ .

### 3.1 Le cas $\alpha > 1$

On considère d'abord le cas où  $\Delta t = \varepsilon^\alpha$ , avec  $\alpha > 1$ .

On propose un filtre approché unidimensionnel et, pour ce filtre, on estime  $X_k - M_k$  et  $\hat{X}_k - M_k$ .

#### Le filtre approché

En analogie avec le cas linéaire, on prendra  $\bar{\theta} = \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon}$  dans le schéma (19), i.e.

$$M_{k+1} = M_k + b(M_k) \Delta t + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\bar{y}_{k+1} - h(M_k)), \quad M_0 = m_0. \quad (20)$$

### 3.1.1 Estimation de $X_k - M_k$

On obtient facilement le résultat suivant, lequel généralise le résultat dans le cas linéaire:

**Proposition 3.1**  $M_k$  étant donné par (20), on a l'estimation

$$E[(X_k - M_k)^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\right\} + c \varepsilon . \quad (21)$$

#### Preuve

On peut utiliser les développements de Taylor des fonctions  $b$  et  $h$ ,

$$b(X_k) = b(M_k) + b'(\zeta_k^X)(X_k - M_k)$$

et

$$h(X_k) = h(M_k) + h'(\xi_k^X)(X_k - M_k) ,$$

pour obtenir l'égalité

$$\begin{aligned} X_{k+1} - M_{k+1} &= [1 - \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \Delta t] (X_k - M_k) \\ &\quad + \sigma \sqrt{\Delta t} (w_{k+1} - v_{k+1}) . \end{aligned} \quad (22)$$

D'après les hypothèses (H3), (H4) et (H5) et, vu que, d'après (H1) et (H2'),  $X_k - M_k$  et  $w_{k+1} - v_{k+1}$  sont indépendants, on a, pour  $\varepsilon$  "assez petit" ( $\varepsilon \leq (\sigma h)^{-1/(\alpha-1)}$ ),

$$E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq (1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^2 E[(X_k - M_k)^2] + 2 \sigma^2 \Delta t .$$

Soit

$$A \triangleq 1 - (1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^2 , \quad B \triangleq 2 \sigma^2 \Delta t .$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned} E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2] &\leq (1 - A)^{k+1} E[(X_0 - M_0)^2] + B \sum_{i=0}^k (1 - A)^i \\ &\leq (1 - A)^{k+1} E[(X_0 - M_0)^2] + \frac{B}{A} , \end{aligned} \quad (23)$$

puisque  $1 - A < 1$ .

Or,

$$c \frac{\Delta t}{\varepsilon} \leq A \leq c \left( \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)$$

donc

$$\frac{B}{A} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et (23) devient:

$$E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_{k+1}}{\varepsilon}\right\} + c\varepsilon$$

ou, plus précisément,

$$E[(X_k - M_k)^2] \leq c(1 - A)^k + c\varepsilon. \quad (24)$$

■

### 3.1.2 Estimation de $\hat{X}_k - M_k$

On montre le théorème suivant:

**Théorème 3.2** *Le schéma (20) vérifie:*

$$\hat{X}_k - M_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon)$$

au sens où

$$E[|\hat{X}_k - M_k|] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\right\} + c(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon).$$

### Preuve

Elle sera divisée en plusieurs parties, utilisant des changements de probabilités, une version discrète du Théorème de Girsanov et la dérivation par rapport à la condition initiale.

### Changement de probabilités.

On introduira deux changements de probabilités (etapes (a) et (b)).

(a) Le 1<sup>ier</sup> changement de probabilités affectera la loi de  $v$ .

On considère la probabilité  $\dot{P}$  définie par:

$$\left. \frac{d\dot{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_k} = L_k^{-1},$$

avec

$$L_k^{-1} = \exp\left\{\sum_{i=1}^k \left[-\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} h(X_{i-1})\right] v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left[-\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} h(X_{i-1})\right]^2\right\}.$$

Soit

$$\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} \bar{y}_k = v_k - \left[ -\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} h(X_{k-1}) \right],$$

où  $X_{k-1}$  est  $\mathcal{F}_{k-1}$ -mesurable.

On obtient:

$$L_k = \exp \left\{ \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} \left[ \sum_{i=1}^k h(X_{i-1}) \bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h^2(X_{i-1}) \right] \right\}.$$

D'après la version discrète du Théorème de Girsanov (voir l'annexe A),

sous  $\dot{P}$  (probabilité de référence),  $w_k$  et  $\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} \bar{y}_k$  sont des  $\mathcal{F}_k$ -bruits blancs gaussiens indépendants. ( $\dot{P}$  est équivalent à  $P$  dans chaque  $\mathcal{F}_k$ .)

(b) Le 2<sup>ième</sup> changement de probabilité va affecter la loi de  $w$ .

On définit la nouvelle probabilité  $\tilde{P}$  par:

$$\left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_k} = \Lambda_k^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_k^{-1} = & \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] w_i \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{w}_k = w_k - \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} [h(X_{k-1}) - h(M_{k-1})],$$

où  $X_{k-1} - M_{k-1}$  est  $\mathcal{F}_{k-1}$ -mesurable.

Alors

$$\begin{aligned} \Lambda_k = & \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] \tilde{w}_i \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})]^2 \right\} \end{aligned}$$

D'après la version discrète du Théorème de Girsanov,

Sous  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{w}_k$  et  $\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} \tilde{y}_k$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants et  $X_k$  vérifie:

$$X_{k+1} = \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} [h(X_k) - h(M_k)] + X_k + b(X_k) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \tilde{w}_{k+1} . \quad (25)$$

La densité de  $P$  par rapport à  $\tilde{P}$  est  $L_k \Lambda_k$  donc:

$\forall v.a. \psi$   $P$ -intégrable et  $\mathcal{F}_k$ -mesurable,

$$E[\psi | \tilde{Y}_1^k] = \frac{\tilde{E}[\psi L_k \Lambda_k | \tilde{Y}_1^k]}{\tilde{E}[L_k \Lambda_k | \tilde{Y}_1^k]} .$$

Soit

$$S \triangleq \log(L_k \Lambda_k) .$$

Puisque

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i &= \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} (X_i - M_i) - \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}} (X_{i-1} - M_{i-1}) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma} [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} [\tilde{y}_i - h(X_{i-1})] \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] [(X_i - M_i) - (X_{i-1} - M_{i-1})] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k h(M_{i-1}) \tilde{y}_i - \frac{\Delta t}{2\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k h^2(M_{i-1}) . \end{aligned} \quad (26)$$

Remarquons que les 3<sup>ième</sup> et 4<sup>ième</sup> termes du second membre de cette expression sont  $\tilde{Y}_1^k$ -adaptés et disparaîtront donc dans la normalisation.

### Dérivation par rapport à la condition initiale.

On considère les variables qui interviennent dans nos calculs comme des fonctions de  $X_0$  (condition initiale) et des processus  $\tilde{w}_k$  et  $\tilde{y}_k$ .

Soit  $\psi_k = \psi(X_0, \tilde{w}_k, \tilde{y}_k)$ .

On veut dériver (25) et (26).



Définissons alors les processus

$$\begin{aligned} Z_k &\triangleq \frac{\partial X_k}{\partial X_0}, \quad Z_0 \equiv 1 \\ Z_{nk} &\triangleq \frac{Z_k}{Z_n}, \quad Z_{0k} = Z_k \end{aligned}$$

et fixons  $k$ .

$X$  est différentiable par rapport à  $X_0$  et sa dérivée est donnée récursivement par l'expression (27).

**Lemme 3.3** Pour  $n \geq k$ ,  $Z_{nk}$  vérifie

$$\begin{aligned} Z_{nk} &= \prod_{j=k}^{n-1} \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_j) + \Delta t b'(X_j)\right)^{-1} \\ Z_{kk} &= 1. \end{aligned} \tag{27}$$

**Preuve**

De (25) vient que:

$$X_{i+1} = \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} [h(X_i) - h(M_i)] + X_i + b(X_i) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \tilde{w}_{i+1}$$

donc, en dérivant par rapport à la condition initiale  $X_0$ , on obtient:

$$Z_{i+1} = \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_i) + \Delta t b'(X_i)\right) Z_i.$$

Par récurrence, on déduit l'expression de  $Z_{i,i+m}$ :

$$Z_{i,i+m} = \prod_{j=i}^{i+m-1} \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_j) + \Delta t b'(X_j)\right).$$

Pour  $n \geq k$ ,

$$Z_{nk} = \prod_{j=k}^{n-1} \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_j) + \Delta t b'(X_j)\right).$$

■

On a la majoration suivante:

$$Z_{nk} \leq \left(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t\right)^{-(n-k)} \tag{28}$$

i.e.

$$Z_{nk} \leq c \exp\left\{-c \frac{t_{n-k}}{\varepsilon}\right\}.$$

D'autre part, en dérivant (26) par rapport à  $X_0$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) &= -\frac{1}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k (X_i - M_i) h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\ &+ \frac{1}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\ &- \frac{1}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] [Z_i - Z_{i-1} - \Delta t b'(X_{i-1}) Z_{i-1}] \\ &+ \frac{\Delta t}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] h'(X_{i-1}) Z_{i-1}. \end{aligned}$$

### Expression asymptotique pour $X_k - M_k$ .

L'égalité précédente nous permettra d'écrire une expression asymptotique pour  $X_k - M_k$ .

On obtient, tout d'abord, l'égalité

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma \varepsilon} (X_k - M_k) h'(X_{k-1}) Z_{k-1} \\ &= \frac{1}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) [h'(X_{i-1}) Z_{i-1} - h'(X_{i-2}) Z_{i-2}] \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\ &+ \frac{\Delta t}{\sigma \varepsilon} \sum_{i=1}^k [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] h'(X_{i-1}) Z_{i-1} - \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k), \\ &\text{avec } Z_{-1} \triangleq 0. \end{aligned}$$

On utilise les développements de Taylor de 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> ordre, respectivement, de  $h$  et  $b$  :

$$\begin{aligned} h(M_{i-1}) - h(X_{i-1}) &= h'(X_{i-1})(M_{i-1} - X_{i-1}) + \frac{1}{2} h''(\xi_{i-1}^X)(M_{i-1} - X_{i-1})^2 \\ b(X_{i-1}) - b(M_{i-1}) &= b'(\zeta_{i-1}^X)(X_{i-1} - M_{i-1}). \end{aligned}$$

On obtient l'égalité:

$$X_k - M_k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) [h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'(X_{i-1})^2 Z_{k-1,i-1} \\
&\quad - h'(X_{i-2}) Z_{k-1,i-2}] \\
&\quad + \frac{\Delta t}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) b'(\xi_{i-1}^X) h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} \\
&\quad + \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon h'(X_{k-1})} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1})^2 h'(X_{i-1}) h''(\xi_{i-1}^X) Z_{k-1,i-1} \\
&\quad - \frac{\sigma \varepsilon}{h'(X_{k-1})} \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} . \tag{29}
\end{aligned}$$

Mais

- pour  $i \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
&h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'(X_{i-1})^2 Z_{k-1,i-1} - h'(X_{i-2}) Z_{k-1,i-2} \\
&= h''(X_{i-2})(X_{i-1} - X_{i-2}) Z_{k-1,i-2} + \frac{1}{2} h'''(\tilde{\xi}_{i-1}^X)(X_{i-1} - X_{i-2})^2 Z_{k-1,i-2} \\
&\quad - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} \left\{ [h''^2(\tilde{\xi}_{i-1}^X) + \frac{1}{2} h'(X_{i-2}) h'''(\tilde{\xi}_{i-1}^X)](X_{i-1} - X_{i-2})^2 \right. \\
&\quad \left. + h'(X_{i-2}) h''(X_{i-2})(X_{i-1} - X_{i-2}) \right\} Z_{k-1,i-2} \\
&\quad + [\Delta t h'(X_{i-1}) b'(X_{i-2}) (1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'(X_{i-1})) - \frac{\sigma^2 \Delta t^2}{\varepsilon^2} h'(X_{i-1})^2 h'(X_{i-2})] Z_{k-1,i-2} ,
\end{aligned}$$

puisque

$$h'(X_{i-1}) - h'(X_{i-2}) = h''(X_{i-2})(X_{i-1} - X_{i-2}) + \frac{1}{2} h'''(\tilde{\xi}_{i-1}^X)(X_{i-1} - X_{i-2})^2$$

et

$$\begin{aligned}
&h'(X_{i-1}) [h'(X_{i-1}) - h'(X_{i-2})] \\
&= h''^2(\tilde{\xi}_{i-1}^X)(X_{i-1} - X_{i-2})^2 + h'(X_{i-2}) [h''(X_{i-2})(X_{i-1} - X_{i-2}) \\
&\quad + \frac{1}{2} h'''(\tilde{\xi}_{i-2}^X)(X_{i-1} - X_{i-2})^2] .
\end{aligned}$$

Soit

$$\phi_i \triangleq \Delta t h'(X_{i-1}) b'(X_{i-2}) (1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'(X_{i-1})) - \frac{\sigma^2 \Delta t^2}{\varepsilon^2} h'(X_{i-1})^2 h'(X_{i-2}) .$$

On a que

$$|\phi_i| \leq c \left( \frac{\Delta t^2}{\varepsilon^2} \vee \Delta t \right) , \quad \forall i \geq 2 .$$

• Pour  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned}
& h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'^2(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} - h'(X_{i-2}) Z_{k-1,i-2} \\
&= (1 - \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_0)) h'(X_0) Z_{k-1,0} \\
&= \phi_1 Z_{k-1,0}
\end{aligned}$$

où

$$\phi_1 \triangleq h'(X_0)(1 - \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_0)).$$

L'égalité (29) devient:

$$\begin{aligned}
& X_k - M_k \\
&= \frac{1}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-1} - X_{i-2}) h''(X_{i-2}) Z_{k-1,i-2} \\
&+ \frac{1}{2 h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-1} - X_{i-2})^2 h'''(\tilde{\xi}_{i-1}^X) Z_{k-1,i-2} \\
&- \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) \{ [h''^2(\tilde{\xi}_{i-1}^X) + \frac{1}{2} h'(X_{i-2}) h'''(\tilde{\xi}_{i-1}^X)] (X_{i-1} - X_{i-2})^2 \\
&\quad + h'(X_{i-2}) h''(X_{i-2})(X_{i-1} - X_{i-2}) \} Z_{k-1,i-2} \\
&+ \frac{1}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) \left[ \frac{\phi_i}{1 + \sigma \Delta t / \varepsilon h'(X_{i-2}) + \Delta t b'(X_{i-2})} \right. \\
&\quad \left. + \Delta t b'(\zeta_{i-1}^X) h'(X_{i-1}) \right] Z_{k-1,i-1} \\
&+ \frac{1}{h'(X_{k-1})} (X_0 - M_0) h'(X_0) (1 - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} h'(X_0) + \Delta t b'(\zeta_0^X)) Z_{k-1,0} \\
&+ \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon h'(X_{k-1})} (X_0 - M_0)^2 h'(X_0) h''(\xi_0^X) Z_{k-1,0} \\
&+ \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})^2 h'(X_{i-1}) h''(\xi_{i-1}^X) Z_{k-1,i-1} \\
&- \frac{\sigma \varepsilon}{h'(X_{k-1})} \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0}. \tag{30}
\end{aligned}$$

On remarque que:

$$\left| \frac{\phi_i}{1 + \sigma \Delta t / \varepsilon h'(X_{i-2}) + \Delta t b'(X_{i-2})} + \Delta t b'(\zeta_{i-1}^X) h'(X_{i-1}) \right| \leq c \left( \frac{\Delta t^2}{\varepsilon^2} \vee \Delta t \right) \triangleq \rho,$$

$\forall i \geq 2$ .

On cherche maintenant des majorations dans  $L^1$  pour les différents termes de droite dans (30), à l'exception du dernier.

Voyons d'abord que:

$$E[|(X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-1} - X_{i-2})|] \leq c \sqrt{\Delta t} (E[(X_{i-1} - M_{i-1})^2])^{1/2}.$$

Puisque, voir (24),

$$E[|X_{i-1} - M_{i-1}|] \leq c [(1 - A)^{1/2}]^{i-1} + c \sqrt{\varepsilon},$$

où

$$1 - A \triangleq (1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^2$$

et, en outre, d'après (28),

$$Z_{nk} \leq (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(n-k)},$$

on a que:

- le 1<sup>ier</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c \sqrt{\varepsilon} \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon, \text{ pour } \Delta t = \varepsilon^\alpha.$$

Cette estimation est justifiée dans l'annexe B.

- le 2<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$\begin{aligned} & c \Delta t \sum_{i=2}^k [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{i-1} + c \sqrt{\varepsilon}] (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(k-i+1)} \\ & \leq c \Delta t (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-k} \sum_{i=1}^{k-1} [1 - (c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^2]^i \\ & \quad + c \Delta t \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^{k-1} (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-i} \\ & \leq c \Delta t (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-k} (k-1) \\ & \quad + c \Delta t \sqrt{\varepsilon} \frac{(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1}}{1 - (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1}} \\ & \leq c \varepsilon \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^{3/2}, \end{aligned}$$

puisque

$$E[|X_{i-1} - X_{i-2}|(X_{i-1} - M_{i-1})^2] \leq c \Delta t (E[(X_{i-1} - M_{i-1})^2])^{1/2}.$$

- le 3<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c \varepsilon^{\alpha-1/2} \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^\alpha ,$$

puisqu'il s'agit de la somme d'un terme du même type du 1<sup>ier</sup> terme ici étudié avec un terme du même type du 2<sup>me</sup>, multipliés par un facteur d'ordre  $\frac{\Delta t}{\varepsilon}$ .

- le 4<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$\begin{aligned} & c \rho \sum_{i=2}^k [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{i-1} + c \sqrt{\varepsilon}] (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(k-i)} \\ & \leq c (\varepsilon \vee \varepsilon^{\alpha-1}) \exp\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\} + c (\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

- le 5<sup>me</sup> et 6<sup>me</sup> termes sont majorés (dans  $L^1$ ) par:

$$c (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(k-1)} \leq c \exp\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\}$$

- le 7<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$\begin{aligned} & c \frac{\Delta t}{\varepsilon} \sum_{i=2}^k \{(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2(i-1)} + c \varepsilon\} (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(k-i)} \\ & \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon \end{aligned}$$

donc on peut écrire que

$$X_k - M_k + \frac{\sigma \varepsilon}{h'(X_{k-1})} \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon) , \quad (31)$$

au sens où

$$E[|X_k - M_k + \frac{\sigma \varepsilon}{h'(X_{k-1})} \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0}|] \leq c \exp\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\} + c (\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon) .$$

Prenons l'espérance conditionnelle par rapport à  $Y_0^k$ .

On va montrer que:

$$E[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | Y_0^k] = \mathcal{O}(1) \quad (32)$$

et alors

$$\hat{X}_k - M_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon) ,$$

au sens où

$$E[|\hat{X}_k - M_k|] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon) ; c > 0 .$$

On utilise le lemme 3.4 pour prouver ce résultat.

**Lemme 3.4** *On a l'estimation*

$$E[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k] = \mathcal{O}(1) .$$

**Preuve**

On rappelle d'abord que:

Si  $g \in C^1$  et  $g$  et  $\frac{\partial g}{\partial x}$  sont des fonctions intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue, alors

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = 0 . \quad (33)$$

En particulier,

soit  $\psi$  une v.a. différentiable par rapport à  $X_0$  telle que:

$$\tilde{E}[|\psi| + |\psi \frac{p'_0}{p_0}(X_0)| + |\frac{\partial \psi}{\partial X_0}|] < \infty , \quad (34)$$

soit

$$g(x) = p_0(x) \psi(x, \tilde{w}_k, \bar{y}_k) ,$$

où  $\psi(x, \{\tilde{w}_k\}, \{\bar{y}_k\})$  est une version différentiable par rapport à  $x$ , alors

$$\tilde{E}[\frac{\partial \psi}{\partial X_0} + \psi \frac{p'_0}{p_0}(X_0) | \tilde{w}, \bar{y}] = 0 . \quad (35)$$

On applique la formule de changement de probabilité,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] &= \frac{\tilde{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} L_k \Lambda_k | \bar{Y}_1^k\right]}{\tilde{E}[L_k \Lambda_k | \bar{Y}_1^k]} \\ &= \frac{\tilde{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right]}{\tilde{E}[L_k \Lambda_k | \bar{Y}_1^k]} . \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{\phi}_k \triangleq \tilde{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] .$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k Z_{k-1,0}) = \frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} + (L_k \Lambda_k) \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0}$$

on a que

$$\tilde{\phi}_k = \tilde{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k Z_{k-1,0}) | \bar{Y}_1^k\right] - \tilde{E}\left[(L_k \Lambda_k) \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] .$$

Étant donné que  $(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0}$  vérifie la condition d'intégrabilité (34) on applique (35) pour obtenir:

$$\tilde{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_0} (L_k \Lambda_k Z_{k-1,0}) | \bar{Y}_1^k\right] = -\tilde{E}\left[(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} \frac{p'_0}{p_0}(X_0) | \bar{Y}_1^k\right]$$

et alors

$$\tilde{\phi}_k = -\tilde{E}\left[\frac{p'_0}{p_0}(X_0) (L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] - \tilde{E}\left[(L_k \Lambda_k) \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] .$$

Soit

$$\begin{aligned} \phi_k &\triangleq E\left[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] \\ &= -\frac{\tilde{E}\left[(L_k \Lambda_k) \frac{p'_0}{p_0}(X_0) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right]}{\tilde{E}[L_k \Lambda_k | \bar{Y}_1^k]} - \frac{\tilde{E}\left[(L_k \Lambda_k) \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right]}{\tilde{E}[L_k \Lambda_k | \bar{Y}_1^k]} \\ &= -E\left[\frac{p'_0}{p_0}(X_0) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] - E\left[\frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] . \end{aligned}$$



Puisqu'on avait supposé que

$$\int \left| \frac{p'_0}{p_0}(x) \right|^r p_0(x) dx < \infty, \quad p_0 \in C^1 \quad (36)$$

et, de (28), on a la majoration

$$\begin{aligned} Z_{k-1,0} &\leq (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-(k-1)} \\ &\leq c \exp\left\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

il vient que le 1<sup>ier</sup> terme est d'ordre  $c \exp\left\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\right\}$ . Alors, il nous suffit de démontrer que

$$E\left[\frac{\partial}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k\right] = \mathcal{O}(1). \quad (37)$$

Or, de (27), on peut obtenir la dérivée partielle de  $Z_{n0}$  par rapport à  $X_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{n0} &= - \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h''(X_i) + \Delta t b''(X_i) \right) (1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_i) + \Delta t b'(X_i))^{-1} \\ &\quad \cdot \prod_{j=i}^{n-1} (1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon} h'(X_j) + \Delta t b'(X_j))^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial X_0} Z_{0,0} = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{n0} \right| &\leq \left( \frac{\Delta t}{\varepsilon} \|\sigma h''\| + \|b''\| \Delta t \right) (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1} \sum_{i=1}^n (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-i} \\ &\leq c \frac{\Delta t}{\varepsilon} (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1} \frac{(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1}}{1 - (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-1}} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

ce qui prouve (37) et termine la démonstration du lemme. ■

**Remarque 3.5** On peut démontrer un lemme plus général que celui-là, lequel peut être énoncé de la façon suivante:

**Lemme 3.6** Soit  $\{F\}_k$  un processus adapté (dépendant de  $\varepsilon$ ), différentiable par rapport à  $X_0$  ( $\forall k = 0, 1, \dots, K$ ).

Si les moments de  $\left\{\frac{\partial F}{\partial X_0}\right\}_k$  sont finis et si  $F_k = \mathcal{O}(\varepsilon^q)$ , alors, pour un certain  $q \geq 0$ ,

$$E[F_k \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k] = -E[\frac{\partial F_k}{\partial X_0} Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k] + \mathcal{O}(\varepsilon^q). \quad (38)$$

**Remarque 3.7** Dans le cas  $h$  linéaire, on voit immédiatement qu'il ne reste plus que les 4<sup>me</sup>, 5<sup>me</sup> et 8<sup>me</sup> termes dans l'expression (30), tous les autres disparaissent et, dans le lemme 3.4 au lieu de  $\mathcal{O}(1)$  on a  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . On obtient ainsi que, si  $h$  est linéaire,

$$\hat{X}_k - M_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon^{3/2}),$$

i.e.

$$E[|X_k - M_k|] \leq c \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon^{3/2}).$$

### 3.1.3 Estimation de l'erreur de filtrage

Enfin, pour obtenir une estimation de l'erreur commise dans une étape de filtrage, il nous suffit de remarquer qu'une approximation de  $\hat{X}_k = E[X_{k-1} | \bar{Y}_1^k]$  est donnée par le schéma (20), étant donné que

$$\begin{aligned} \hat{X}_k - \tilde{X}_k &= E[X_k | \bar{Y}_1^k] - E[X_{k-1} | \bar{Y}_1^k] \\ &= E[(b(X_{k-1}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} w_k | \bar{Y}_1^k] \\ &= \Delta t E[b(X_{k-1}) | \bar{Y}_1^k] \end{aligned}$$

i.e.

$$|\hat{X}_k - \tilde{X}_k| \leq c \Delta t. \quad (39)$$

## 3.2 Le cas $\alpha = 1$

On considère maintenant le cas où le paramètre  $\Delta t$  vaut  $\varepsilon$ , i.e.  $\alpha = 1$  dans l'hypothèse (H5).

Le système considéré est donc décrit par les équations:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + b(X_k) \varepsilon + \sigma \sqrt{\varepsilon} w_{k+1}, & X_0 = \xi \\ \bar{y}_{k+1} = h(X_k) + \sqrt{\varepsilon} v_{k+1}. \end{cases} \quad (40)$$

En plus des hypothèses énoncées en début de cette section dédiée au cas non linéaire, on suppose que:

$$(H6) \quad \exists \bar{c} > 0 : \|\sigma h'\| + \bar{c} = 2 c_h .$$

**Remarque 3.8** Une telle restriction signifie que notre étude n'est valable que si la fonction  $h$  "s'approche" d'une fonction linéaire.

**Remarque 3.9** En fait on peut considérer une hypothèse légèrement moins restrictive, mais moins intuitive quand à l'interprétation. Il suffit, dans le lemme 3.11, d'avoir le soin de chercher une minoration du gain un peu plus fine.

### Le filtre approché

On aimerait pouvoir construire un filtre approché unidimensionnel, pour ce problème. Cependant cette tâche se révèle délicate, ce qui nous ramène à la recherche d'un filtre du genre du filtre de Kalman étendu.

On considère le filtre bidimensionnel suivant:

$$M_{k+1} = M_k + b(M_k) \varepsilon + \bar{\theta}_k (\bar{y}_{k+1} - h(M_k)) , \quad M_0 = m_0 , \quad (41)$$

où

$$\bar{\theta}_k = \frac{h'(M_k)[\bar{\theta}_{k-1} + \sigma^2 h'(M_{k-1})]}{h'^2(M_k)[\bar{\theta}_{k-1} + \sigma^2 h'(M_{k-1})] + h'(M_{k-1})} , \quad \bar{\theta}_0 = \theta_0 . \quad (42)$$

Pour  $b$  et  $h$  linéaires, ce filtre correspond à prendre le filtre de Kalman - Bucy et négliger les termes en  $b \Delta t$  dans l'expression du gain.

On cherche d'abord à estimer  $X_k - M_k$  et ensuite  $\hat{X}_k - M_k$ . Les méthodes utilisées pour obtenir ces estimations sont essentiellement les mêmes de la section précédente. La même considération sur l'erreur de filtrage dans le cas précédent est vraie, i.e., avec les notations du paragraphe 3.1.3, on a que

$$|\hat{X}_k - \tilde{X}| \leq c \varepsilon .$$

#### 3.2.1 Estimation de $X_k - M_k$

On établit la proposition suivante:

**Proposition 3.10** *On a l'estimation*

$$E[(X_k - M_k)^2] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\right\} + c \varepsilon .$$

Pour démontrer cette proposition on fera appel au lemme 3.11 ci dessous:

**Lemme 3.11** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour un certain  $A > 0$ ,*

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 , \quad |1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon| \leq 1 - A .$$

**Preuve** (de la proposition 3.10):

- On a l'expression récurrente:

$$\begin{aligned} X_{k+1} - M_{k+1} &= (X_k - M_k) + [b(X_k) - b(M_k)] \varepsilon - \bar{\theta}_k [h(X_k) - h(M_k)] \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} (\sigma w_{k+1} - \bar{\theta}_k v_{k+1}) \\ &= [1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon] (X_k - M_k) \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} (\sigma w_{k+1} - \bar{\theta}_k v_{k+1}), \end{aligned}$$

puisque

$$h(X_k) - h(M_k) = h'(\xi_k^X)(X_k - M_k)$$

et

$$b(X_k) - b(M_k) = b'(\zeta_k^X)(X_k - M_k).$$

- D'après le lemme 3.11, pour  $\varepsilon$  "assez petit", on a que

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, |1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon| \leq 1 - A < 1.$$

- D'autre part, on a que

$$E[(\sigma w_{k+1} - \bar{\theta}_k v_{k+1})^2] = \sigma^2 + E[\bar{\theta}_k^2] + 2\sigma E[\bar{\theta}_k w_{k+1} v_{k+1}] \leq c$$

(puisque  $(\bar{\theta}_k)_k$  est une suite bornée) et

$$E\{(\sigma w_{k+1} - \bar{\theta}_k v_{k+1}) [(X_k - M_k) + [b(X_k) - b(M_k)] \varepsilon - \bar{\theta}_k [h(X_k) - h(M_k)]]\} = 0$$

donc

$$\begin{aligned} E[(X_{k+1} - M_{k+1})^2] &\leq (1 - A)^2 E[(X_k - M_k)^2] + c\varepsilon \\ &\leq (1 - A)^{2(k+1)} E[(X_0 - M_0)^2] + c \frac{\varepsilon}{A}, \end{aligned}$$

d'où la proposition. ■

**Preuve** (du lemme 3.11):

De (42) il vient que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta}_k}{\sigma} &= \frac{\sigma h'(M_k) [\bar{\theta}_{k-1}/\sigma + \sigma^2 h'(M_{k-1})]}{\sigma^2 h'^2(M_k) [\bar{\theta}_{k-1}/\sigma + \sigma^2 h'(M_{k-1})] + \sigma h'(M_{k-1})} \\ &< \frac{1}{\sigma h'(M_k)} \leq \frac{1}{c_h} \end{aligned}$$

et alors on a que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta}_k}{\sigma} &> \frac{\sigma^2 h'(M_k) h'(M_{k-1})}{\sigma^2 h'^2(M_k) [1/(\sigma h'(M_{k-1})) + \sigma h'(M_{k-1})] + \sigma h'(M_{k-1})} \\ &\geq \frac{c_h^3}{2 \|\sigma h'\|^2 + \|\sigma h'\|^4}. \end{aligned}$$

On obtient les bornes inférieure et supérieure suivantes, pour  $\bar{\theta}_k h'(\xi_k^X)$ :

$$\frac{c_h^4}{2 \|\sigma h'\|^2 + \|\sigma h'\|^4} < \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) < \frac{\|\sigma h'\|}{c_h},$$

d'où on déduit que:

- pour  $A_1 < \frac{c_h^4}{2 \|\sigma h'\|^2 + \|\sigma h'\|^4}$  et  $\varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{1}{\|b'\|} \left( \frac{c_h^4}{2 \|\sigma h'\|^2 + \|\sigma h'\|^4} - A_1 \right)$ , on a la majoration

$$1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon < 1 - \frac{c_h^4}{2 \|\sigma h'\|^2 + \|\sigma h'\|^4} + \|b'\| \varepsilon \leq 1 - A_1,$$

- pour  $A_2 < \frac{\bar{c}}{c_h}$  et  $\varepsilon < \varepsilon_2 = \frac{\bar{c} - A_2 c_h}{c_h \|b'\|}$ , on a la minoration

$$1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon > 1 - \frac{\|\sigma h'\|}{c_h} - \|b'\| \varepsilon \geq A_2 - 1 > -1.$$

Il suffit de considérer

$$A = \min(A_1, A_2) \text{ et } \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

■

### 3.2.2 Estimation de $\hat{X}_k - M_k$

Le théorème suivant nous donne une estimation sur l'erreur de prédiction  $\hat{X}_k - M_k$ .

**Théorème 3.12** *On a l'estimation*

$$E[|\hat{X}_k - M_k|] \leq c \exp\left\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\right\} + c \varepsilon.$$

**Preuve** la méthode suivie pour démontrer ce théorème est essentiellement la même que dans le cas précédent.

### Changement de probabilités

- (a) On considère la probabilité  $\tilde{P}$  précédemment définie, avec  $\Delta t = \varepsilon$ .
- (b) On considère la nouvelle probabilité  $\tilde{P}$  définie par:

$$\left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_k} = \Lambda_k^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_k^{-1} = \exp \{ & \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] w_i \\ & - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}^2} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})]^2 \} . \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{w}_k = w_k - \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon} \bar{\theta}_{k-1}} [h(X_{k-1}) - h(M_{k-1})] .$$

Alors

$$\begin{aligned} \Lambda_k^{-1} = \exp \{ & -\frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] \tilde{w}_i \\ & - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}^2} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})]^2 \} . \end{aligned}$$

Sous  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{w}_k$  et  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{y}_k$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants et  $X_k$  vérifie maintenant l'équation récurrente

$$X_{k+1} = \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_k} [h(X_k) - h(M_k)] + X_k + b(X_k) \varepsilon + \sigma \sqrt{\varepsilon} \tilde{w}_{k+1} . \quad (43)$$

Désignant toujours par  $S$  le logarithme de  $L_k \Lambda_k$ , puisque

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i = & \frac{1}{\sigma \sqrt{\varepsilon}} (X_i - M_i) - \frac{1}{\sigma \sqrt{\varepsilon}} (X_{i-1} - M_{i-1}) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma} [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] \\ & - \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon} \bar{\theta}_{i-1}} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] + \frac{\bar{\theta}_{i-1}}{\sigma \sqrt{\varepsilon}} [\bar{y}_i - h(X_{i-1})] , \end{aligned}$$

on a que

$$\begin{aligned}
S = & -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] [(X_i - M_i) - (X_{i-1} - M_{i-1})] \\
& + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \left[ -\frac{1}{2} h^2(X_{i-1}) + h'(X_{i-1}) h(M_{i-1}) \right] \\
& + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}^2} [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})]^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k h(M_{i-1}) [\bar{y}_i - h(M_{i-1})] . \quad (44)
\end{aligned}$$

Le dernier terme dans cette égalité est  $\bar{Y}_1^k$ -adapté et disparaîtra donc dans la normalisation.

### Dérivation par rapport à la condition initiale.

Avec les mêmes notations utilisées précédemment on obtient,

- en dérivant l'expression (43),

$$Z_{i+1} = \left(1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_i} h'(X_i) + b'(X_i) \varepsilon\right) Z_i ,$$

où  $\frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_i} h'(X_i) > c_h^2$  (voir la preuve du lemme 3.11). On a donc la majoration

$$Z_{nk} \leq (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(n-k)} .$$

- en dérivant l'expression (44),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) = & -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} (X_i - M_i) h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} (X_{i-1} - M_{i-1}) h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\
& + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} [b(X_{i-1}) - b(M_{i-1})] h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k [h(X_{i-1}) - h(M_{i-1})] \left\{ \frac{1}{\bar{\theta}_i} [Z_i - Z_{i-1} - b'(X_{i-1}) \varepsilon Z_{i-1}] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sigma^2 - \bar{\theta}_{i-1}^2}{\bar{\theta}_{i-1}^2} h'(X_{i-1}) Z_{i-1} \right\} .
\end{aligned}$$

### Expression asymptotique pour $X_k - M_k$ .

On obtient l'expression asymptotique suivante:

$$\begin{aligned}
 & X_k - M_k \\
 = & \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) \left\{ h'(X_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(X_{i-1}) \right] Z_{k-1,i-1} - \frac{h'(X_{i-2})}{\bar{\theta}_{i-2}} Z_{k-1,i-2} \right\} \\
 & + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{2 h'(X_{k-1})} \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1})^2 h''(\xi_{i-1}^X) h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} \\
 & + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \sum_{i=1}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) b'(\zeta_{i-1}^X) \frac{h'(X_{i-1})}{\bar{\theta}_{i-1}} Z_{k-1,i-1} \\
 & - \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,i-1}.
 \end{aligned}$$

Mais

- pour  $i \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
 & h'(X_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(X_{i-1}) \right] Z_{k-1,i-1} - \frac{h'(X_{i-2})}{\bar{\theta}_{i-2}} Z_{k-1,i-2} \\
 = & h'(X_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(X_{i-1}) \right] b'(X_{i-2}) \varepsilon Z_{k-1,i-2} + \phi_i Z_{k-1,i-2},
 \end{aligned}$$

où

$$\phi_i \triangleq h'(X_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(X_{i-1}) \right] \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} h'(X_{i-2}) \right] - \frac{h'(X_{i-2})}{\bar{\theta}_{i-2}}.$$

Étant donné que  $\bar{\theta}_i$  vérifie

$$h'(M_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(M_{i-1}) \right] \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} h'(M_{i-2}) \right] - \frac{h'(M_{i-2})}{\bar{\theta}_{i-2}} = 0$$

et, en utilisant les développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de la fonction  $h'$ , on a que

$$\begin{aligned}
 \phi_i = & \left\{ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-1} \bar{\theta}_{i-2}} h'(X_{i-2}) - [h'(X_{i-1}) + h'(M_{i-1})] \right. \\
 & \left. - \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} h'(M_{i-2}) [h'(X_{i-1}) + h'(M_{i-1})] \right\} h''(\bar{\xi}_{i-1}^X) (X_{i-1} - M_{i-1}) \\
 & + \left\{ -\frac{1}{\bar{\theta}_{i-2}} + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-1} \bar{\theta}_{i-2}} h'(M_{i-1}) - h'^2(X_{i-1}) \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} \right\} h''(\bar{\xi}_{i-2}^X) (X_{i-2} - M_{i-2})
 \end{aligned}$$

- pour  $i = 1$  on a tout simplement

$$\phi_1 \triangleq h'(X_0) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_0} - h'(X_0) \right].$$



L'expression asymptotique de  $X_k - M_k$  devient:

$$\begin{aligned}
& X_k - M_k \\
= & \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=3}^k (X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-2} - M_{i-2}) \\
& \cdot \left\{ -\frac{1}{\bar{\theta}_{i-2}} + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-1} \bar{\theta}_{i-2}} h'(M_{i-1}) - h'^2(X_{i-1}) \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} \right\} h''(\bar{\xi}_{i-2}^X) Z_{k-1,i-2} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})^2 \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-1} \bar{\theta}_{i-2}} h'(X_{i-2}) - [h'(X_{i-1}) + h'(M_{i-1})] \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_{i-2}} h'(M_{i-2}) \right] \right\} \\
& \cdot h''(\bar{\xi}_{i-1}^X) Z_{k-1,i-2} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{2 h'(X_{k-1})} \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})^2 h''(\bar{\xi}_{i-1}^X) h'(X_{i-1}) Z_{k-1,i-1} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) h'(X_{i-1}) \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{i-1}} - h'(X_{i-1}) \right] b'(X_{i-2}) Z_{k-1,i-2} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1}) b'(\zeta_{i-1}^X) \frac{h'(X_{i-1})}{\bar{\theta}_{i-1}} Z_{k-1,i-2} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} (X_{i-1} - M_{i-1})(X_0 - M_0) \left\{ -\frac{1}{\bar{\theta}_0} + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_1 \bar{\theta}_0} h'(M_1) - h'^2(X_1) \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_0} \right\} h''(\bar{\xi}_0^X) Z_{k-1,0} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} (X_0 - M_0) \left\{ \frac{1}{\bar{\theta}_0} - h'(X_0) + \varepsilon b'(\zeta_0^X) \frac{1}{\bar{\theta}_0} \right\} h'(X_0) Z_{k-1,0} \\
& + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{2 h'(X_{k-1})} (X_0 - M_0)^2 h''(\bar{\xi}_0^X) h'(X_0) Z_{k-1,0} \\
& - \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0}.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent on cherche des majorations dans  $L^1$  pour les différents termes à droite dans cette expression, à l'exception du dernier.

Puisque (voir le lemme 3.11 et la proposition 3.10)

$$\begin{aligned}
& E[|(X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-2} - M_{i-2})|] \\
\leq & E[|1 - \bar{\theta}_k h'(\xi_k^X) + b'(\zeta_k^X) \varepsilon| (X_{i-2} - M_{i-2})^2] \\
& + \sqrt{\varepsilon} E[|\sigma w_{i-1} - \bar{\theta}_{i-2} v_{i-1}| |X_{i-2} - M_{i-2}|] \\
\leq & (1 - A) E[(X_{i-2} - M_{i-2})^2] + c \sqrt{\varepsilon} (E[(X_{i-2} - M_{i-2})^2])^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} (1-A)^{2i-3} E[(X_0 - M_0)^2] + c\varepsilon + c\sqrt{\varepsilon} \{ (1-A)^{i-2} (E[(X_0 - M_0)^2])^{1/2} + c\sqrt{\varepsilon} \}, \\ \text{si } i \geq 3 \\ (1-A) E[(X_0 - M_0)^2] + c\sqrt{\varepsilon} (E[(X_0 - M_0)^2])^{1/2}, \text{ si } i = 2, \end{cases}$$

on a que:

- le 1<sup>ier</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$\begin{aligned} & c \sum_{i=3}^k \{ c(1-A)^{2(i-1)} + c\varepsilon + c\sqrt{\varepsilon} (1-A)^{i-2} \} (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(k-i+1)} \\ & \leq c \exp \left\{ -c \frac{t_k}{\varepsilon} \right\} + c\varepsilon \end{aligned}$$

(On prend, dans le lemme 3.11,  $1 - A > 1/(1 + c_h^2)$ .)

- le 2<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c \sum_{i=2}^k [(1-A)^{2(i-1)} + c\varepsilon] (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(k-i+1)} \leq c \exp \left\{ -c \frac{t_k}{\varepsilon} \right\} + c\varepsilon$$

- le 3<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c \sum_{i=2}^k [(1-A)^{2(i-1)} + c\varepsilon] (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(k-i)} \leq c \exp \left\{ -c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon} \right\} + c\varepsilon$$

- le 4<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c\varepsilon \sum_{i=2}^k [(1-A)^{(i-1)} + c\sqrt{\varepsilon}] (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(k-i+1)} \leq c\varepsilon \exp \left\{ -c \frac{t_k}{\varepsilon} \right\} + c\varepsilon^{3/2}$$

- le 5<sup>me</sup> terme est majoré (dans  $L^1$ ) par:

$$c\varepsilon \exp \left\{ -c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon} \right\} + c\varepsilon^{3/2}$$

- les 6<sup>me</sup>, 7<sup>me</sup> et 8<sup>me</sup> termes, représentant la contribution de l'erreur à l'instant initial, sont majorés (dans  $L^1$ ) par:

$$c(1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-(k-1)} \leq c \exp \left\{ -c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon} \right\}.$$

Finalement, on a que

$$E[|X_k - M_k + \frac{\bar{\theta}_{k-1}}{h'(X_{k-1})} \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k)|] \leq c \exp\{-c \frac{t_{k-1}}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^{3/2}.$$

Prenons l'espérance conditionnelle par rapport à  $\bar{Y}_1^k$  dans l'expression asymptotique de  $X_k - M_k$ .

Le lemme qui suit complète la démonstration. ■

**Lemme 3.13** *On a l'estimation*

$$E[\frac{\partial}{\partial X_0} \log(L_k \Lambda_k) Z_{k-1,0} | \bar{Y}_1^k] = \mathcal{O}(1).$$

**Preuve** La preuve de ce lemme suit les mêmes pas de celle du cas  $\alpha > 1$ . Il suffit de remarquer que  $Z_{n0}$  est donné par

$$Z_{n0} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_i} h'(X_i) + b'(X_i) \varepsilon)^{-1}$$

et sa dérivée par rapport à  $X_0$  est donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_0} Z_{n0} &= - \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_i} h''(X_i) + b''(X_i) \varepsilon) (1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_i} h'(X_i) + b'(X_i) \varepsilon)^{-1} \\ &\quad \cdot \prod_{j=i}^{n-1} (1 + \frac{\sigma^2}{\bar{\theta}_j} h'(X_j) + b'(X_j) \varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où la majoration:

$$|\frac{\partial}{\partial X_0} Z_{n0}| \leq c(1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-1} \sum_{i=1}^n (1 + c_h^2 - \|b'\| \varepsilon)^{-1} \leq c. \quad \blacksquare$$

### 3.3 Le cas $\alpha < 1$

Dans le cas où  $\Delta t = \varepsilon^\alpha$ , avec  $\alpha < 1$ , on fait le raisonnement suivant:

D'après l'équation d'observation on a que

$$y_k - h(X_k) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}} \bar{w}_k$$

est un bruit blanc gaussien de variance  $\varepsilon^{2-\alpha}$ , donc il est bien connu que, pour  $c_0 \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$ , on a la majoration

$$P(|y_k - h(X_k)| > c_0) \leq \frac{2\varepsilon^{1-\alpha/2}}{c_0\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{\varepsilon^{1-\alpha/2}}\right)^2\right\}.$$

Supposons que la fonction  $h$  est inversible et que  $h^{-1}$  est continue et bornée. Prenons

$$M_k = h^{-1}(y_k), \quad (45)$$

i.e. notre filtre approché consiste tout simplement à prendre l'image inverse par  $h$  de l'observation.

Alors

$$|X_k - M_k| \leq \|h^{-1}\| |h(X_k) - y_k|$$

donc, pour  $c_1 \geq \|h^{-1}\| \varepsilon^{1-\alpha/2}$ , on a que

$$P(|X_k - M_k| > c_1) \leq \frac{2\|h^{-1}\| \varepsilon^{1-\alpha/2}}{c_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{\|h^{-1}\| \varepsilon^{1-\alpha/2}}\right)^2\right\}.$$

En termes d'espérances on a tout simplement que

$$E[(X_k - M_k)^2] \leq \|h^{-1}\|^2 E[(h(X_k) - y_k)^2] = \|h^{-1}\|^2 \frac{\varepsilon^2}{\Delta t}.$$

En un mot, le filtre défini par (45) est déjà un filtre "performant".

Quand au résultat concernant l'estimation de l'erreur par rapport au filtre optimal, il semble difficile de trouver le bon changement de probabilité qui conduit à l'expression asymptotique pour  $X_k - M_k$  dont les termes soient facilement estimés.

### 3.4 Récapitulatif

Le tableau suivant nous donne le filtre approché à prendre selon la valeur de  $\alpha$  ainsi que l'estimation sur son efficacité.

| <i>filtre approché</i> |                                                                                                                                                                                                                             | <i>estimation de l'erreur</i> |                                                |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|
|                        |                                                                                                                                                                                                                             | $E[(X_k - M_k)^2]$            | $E[\hat{X}_k - M_k]$                           |
| $\alpha < 1$           | $M_k = h^{-1}(y_k)$                                                                                                                                                                                                         | $\varepsilon^{2-\alpha}$      |                                                |
| $\alpha = 1$           | $M_k = M_{k-1} + b(M_{k-1})\varepsilon + \bar{\theta}_k(y_k - h(M_{k-1}))$ $\bar{\theta}_k = \frac{h'(M_k)[\bar{\theta}_{k-1} + \sigma^2 h'(M_{k-1})]}{h'^2(M_k)[\bar{\theta}_{k-1} + \sigma^2 h'(M_{k-1})] + h'(M_{k-1})}$ | $c\varepsilon$                | $c\varepsilon$                                 |
| $\alpha > 1$           | $M_k = M_{k-1} + b(M_{k-1})\Delta t + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon}(y_k - h(M_{k-1}))$                                                                                                                                | $c\varepsilon$                | $c(\varepsilon^{\alpha-1/2} \vee \varepsilon)$ |

## 4 Application numérique

Supposons qu'on veut résoudre le problème de filtrage suivant:

À chaque instant  $t \in [0, T]$  on voudrait estimer le processus  $X_t$  donné par l'équation différentielle stochastique ci dessous, étant connue l'observation  $Y_t$  jusqu'à l'instant  $t$

$$\begin{cases} dX_t &= -X_t dt + \sigma dw_t^1 \\ dY_t &= (X_t^3 + X_t) dt + \varepsilon dw_t^2, \end{cases}$$

où  $w^1$  et  $w^2$  sont des processus de Wiener indépendants et  $X_0$  est une variable aléatoire gaussienne de loi  $\mathcal{N}(\bar{X}_0, p_0)$ , avec

- $\sigma = 1.$
- $\bar{X}_0 = 2.$
- $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$
- $p_0 = 1.$

La résolution numérique de ce problème peut être envisagée de deux façons distinctes: on peut discrétiser l'équation de Zakai ou utiliser un filtre approché pour calculer une approximation de la solution. Dans notre cas, on commencera par discrétiser le système continu et ainsi obtenir un système discret. Pour ce système discret, on discutera l'application du filtre approché proposé dans la section 3.1 (bien que l'hypothèse (H3') ne soit pas vérifiée dans ce cas). On remarque qu'il s'agit d'un filtre de dimension 1, au sens où on a une seule expression recursive à évaluer. Cet estimateur nous permettra d'obtenir une approximation du filtre optimal facile à calculer. Par ailleurs, on avait démontré des résultats asymptotiques garantissant la qualité du filtre (voir la section 3.1). Les pas de discrétisation à considérer varieront selon la valeur de  $\varepsilon$  et on regardera l'intervalle de temps  $[0, 1]$ .

Dans la suite on se propose de vérifier numériquement la performance du filtre approché par rapport à l'estimation donnée par l'équation de Zakai. Le comportement du filtre par rapport à la trajectoire simulée est aussi étudié.

Les 3 figures qui suivent (figure 1, figure 2 et figure 3) représentent l'erreur quadratique moyenne (*eqm*), obtenue sur 100 simulations de trajectoires indépendantes. Pour des raisons évidentes on utilise des échelles logarithmiques sur les deux axes.

On voit immédiatement que, quand  $\varepsilon$  est petit ( $\varepsilon = 0.1, 0.01, \dots$ ), la courbe logarithmique s'approche d'une droite, i.e.

$$\sqrt{eqm} \simeq 10^{-\text{gamma}} \varepsilon^{\text{pente}}.$$

On peut donc constater que la proposition 3.1 et le théorème 3.1.2, énoncés précédemment, sont vérifiés numériquement.

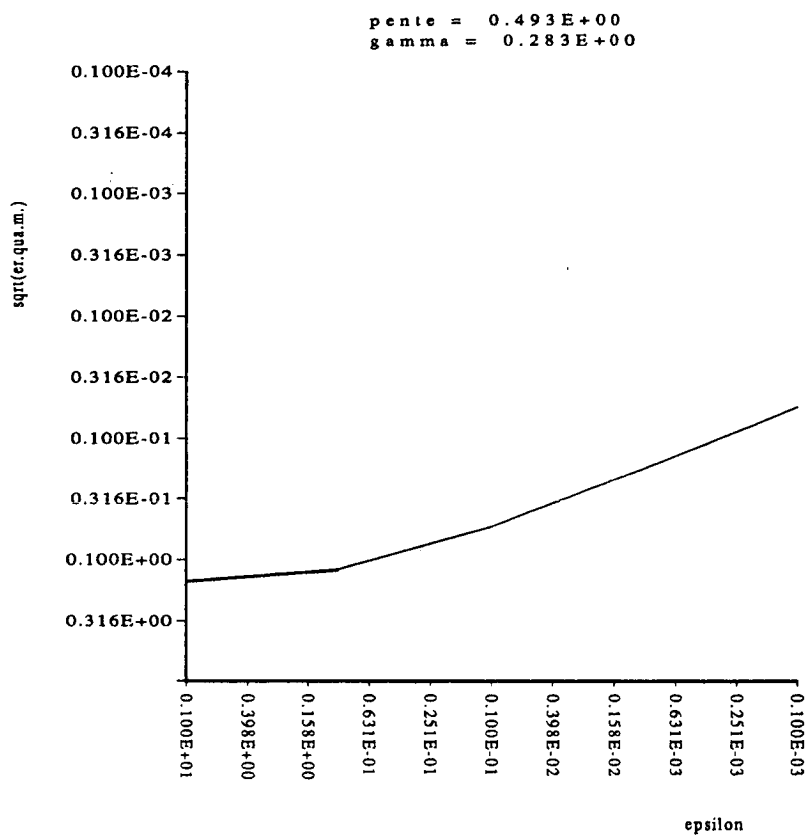


Figure 1: l'erreur quadratique moyenne entre le filtre approché et la trajectoire simulée, en fonction de  $\varepsilon$ .

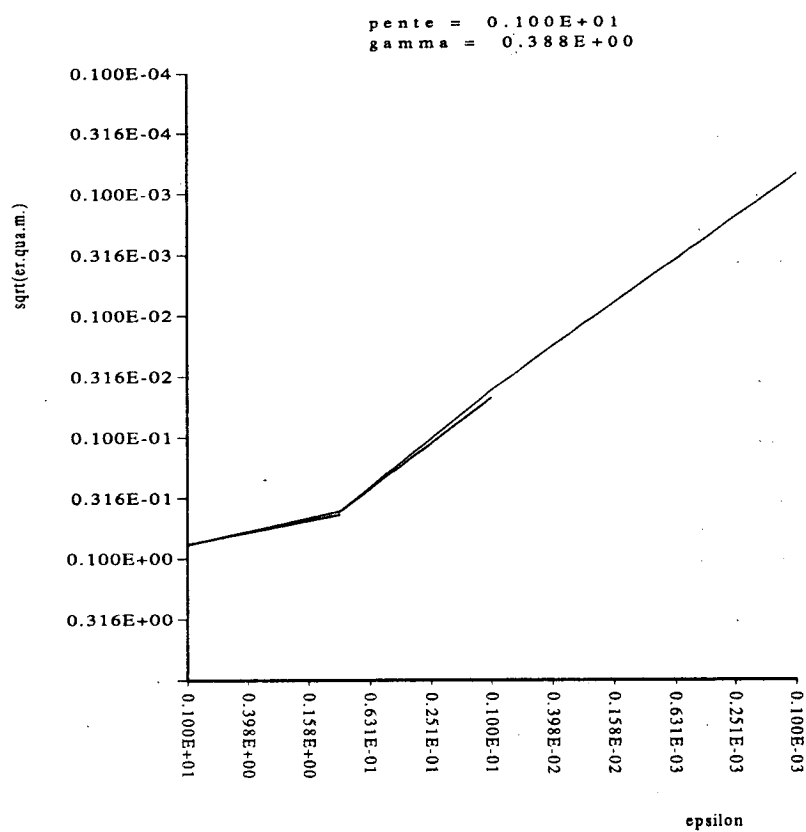


Figure 2: l'erreur quadratique moyenne entre le filtre approché et l'estimation donnée par l'équation de Zakai, en fonction de  $\epsilon$ .



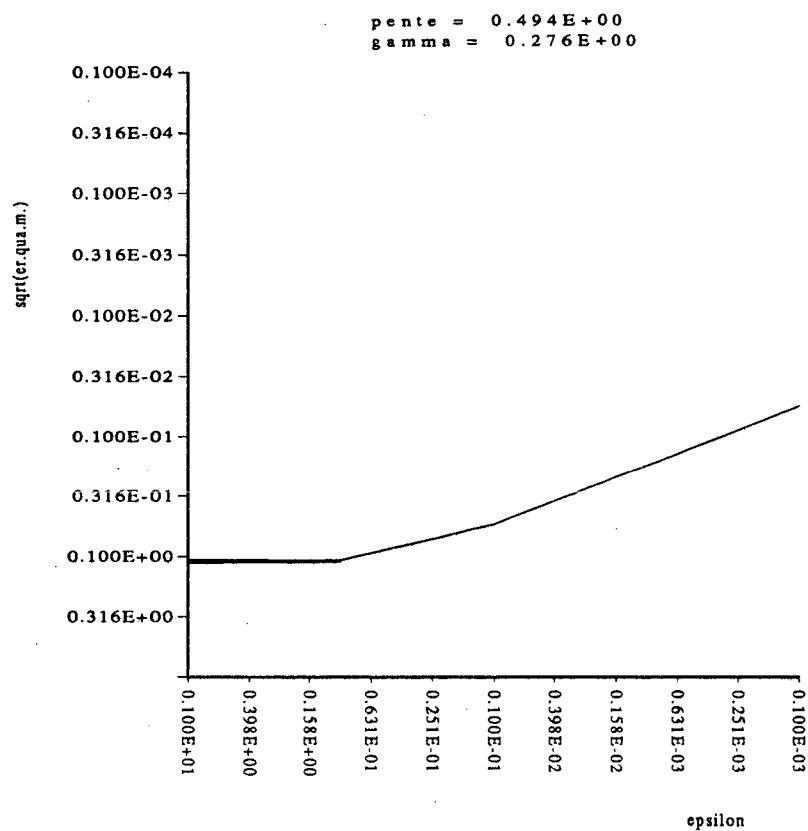


Figure 3: l'erreur quadratique moyenne entre l'estimation donnée par l'équation de Zakai et la trajectoire simulée, en fonction de  $\varepsilon$ .

Dans la figure 4 on représente, pour  $\varepsilon = 0.1$ , l'évolution de l'erreur quadratique moyenne au cours du temps. Le pas de discrétisation utilisé a été  $\Delta t = 0.01$ .

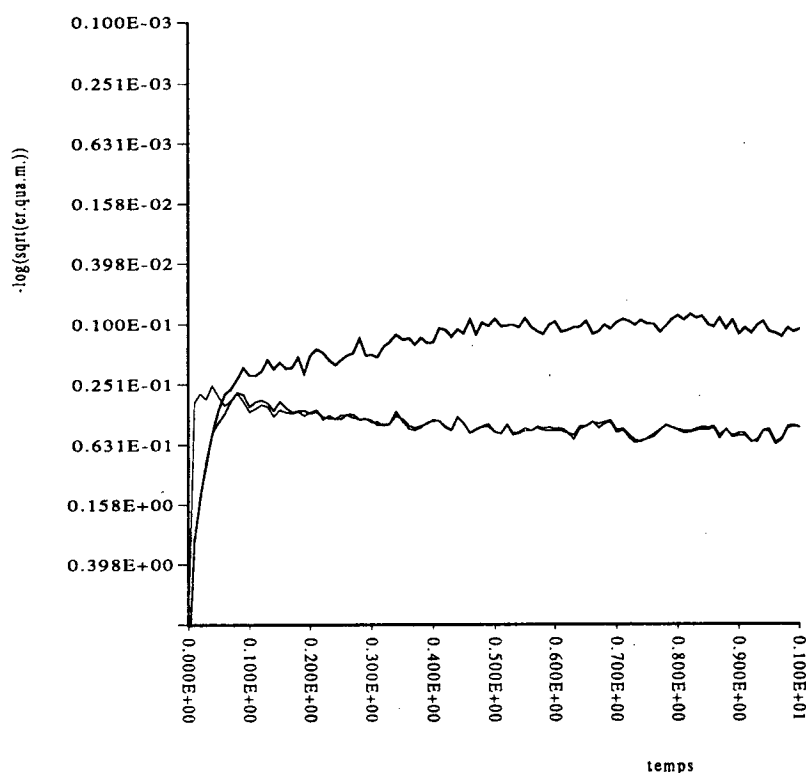


Figure 4: l'erreur quadratique moyenne entre la trajectoire simulée et les estimations et celles-ci entre elles, au cours du temps.

Le trait le plus épais correspond à l'erreur entre les deux filtres et les deux autres traits les erreurs de ces mêmes filtres par rapport à la trajectoire simulée, le trait le plus fin étant celui qui correspond à l'erreur relative au filtre optimal. La ressemblance entre le comportement du filtre approché et du filtre optimal est évidente.

Finalement, dans la dernière figure (figure 5), on représente une seule trajectoire et le filtre approché, ainsi que l'estimation obtenue par résolution numérique de l'équation de Zakai.

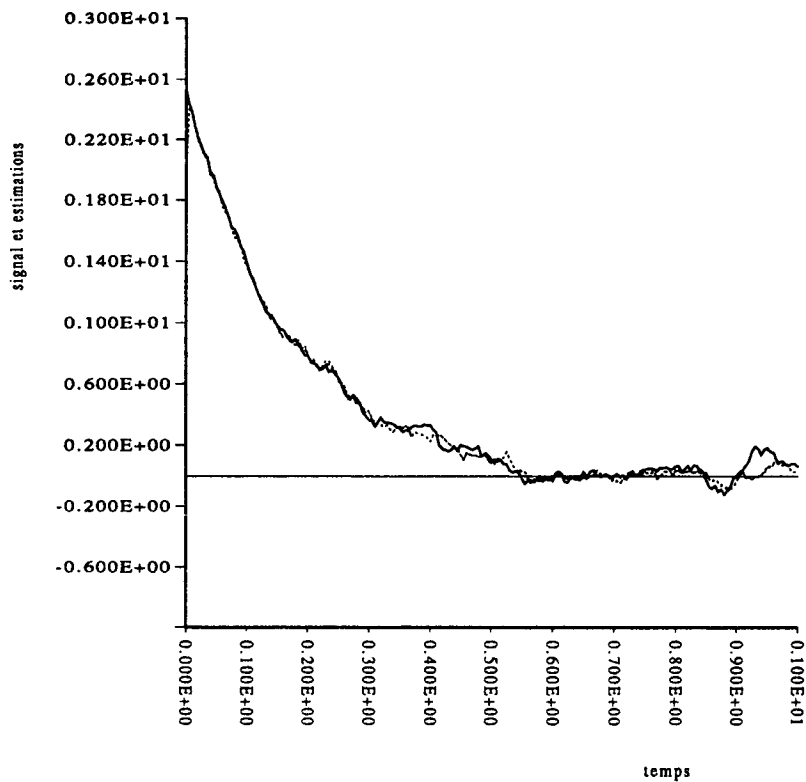


Figure 5: l'évolution des filtres approché et optimal sur une trajectoire simulée.

On voit facilement que les filtres (en pointillé sur la figure) évoluent de manière semblable et qu'il devient difficile de distinguer les deux.

Pour le calcul de la solution de l'équation de Zakai on a utilisé un programme FORTRAN généré à cet effet par le logiciel ZPB, travail en cours de développement au sein du projet MEFISTO, à l'INRIA - centre de Sophia - Antipolis.

Dans cette étude asymptotique de qualité des filtres, deux difficultés importantes se présentent, dans la mise en œuvre des algorithmes. Effectivement, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la densité conditionnelle solution du problème de filtrage s'approche d'une gaussienne ayant un pic "très prononcé", ce qui nous a obligé à utiliser un pas de discrétisation en espace très petit dans l'algorithme de résolution de l'équation de Zakai. Cette difficulté conduira à la recherche d'algorithmes plus performants pour la discrétisation de l'équation de Zakai, lorsque le bruit d'observation est petit.

Les essais numériques ici présentés ont été réalisés sur un mini supercalculateur vectoriel CONVEX C210. Le temps de calcul nécessaire et l'espace de mémoire requise nous ont posé des contraintes pour la résolution numérique du problème de filtrage. D'abord, dans la discrétisation du système continu par rapport au temps, on est obligé de prendre des pas de temps de plus en plus petits, quand  $\varepsilon$  devient lui aussi petit. Le pas de temps le plus petit considéré dans cet exemple est de l'ordre de  $10^{-5}$ . D'autre part, il y a le fait qu'on vient de citer que le nombre de points nécessaires dans la discrétisation en espace de l'équation de Zakai est très élevé. Dans notre exemple il a été de l'ordre de  $2 \times 10^5$  pour les valeurs plus petites de  $\varepsilon$ .

Pour la résolution de ce problème on aurait pu aussi bien utiliser d'autres filtres approchés, par exemple le filtre de Kalman étendu ou encore le filtre de Katzur-Picard (cf. [Milheiro]).

## Références

- [Bensoussan] Bensoussan, A. : *On some approximation techniques in non linear filtering*, Proceedings of June 1986 Workshop, Institute for Math. and Its Applications, University of Minnesota.
- [Gelb] Gelb, A. : *Applied Optimal Estimation*, written by the Technical Staff, The Analytical Sciences Corporation, M.I.T. Press, 1974.
- [Jazwinski] Jazwinski, A. H. : *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.
- [Kallianpur] Kallianpur, G. : *Stochastic Filtering Theory*, Applications of Mathematics, Tome 13, Springer-Verlag 1975.
- [KBS] Katzur, R. Bobrovsky, B.Z. and Schuss, Z. : *Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise channel*, SIAM J. Appl. Math. 44 (1984), Part I: 591-604, Part II: 1176-1191.
- [Le Gland] Le Gland, F. : *Estimation de paramètres dans les processus stochastiques, en observation incomplète – Application à un problème de radio-astronomie*, Thèse présentée à l'Université Paris IX-Dauphine le 26 Novembre 1981 pour obtenir le titre de Docteur-Ingenieur.
- [Milheiro] Milheiro de Oliveira, P. : *Filtrage non linéaire avec petit bruit d'observation. Comparaison numérique de 2 filtres*, rapport de stage de D.E.A., Université de Provence, 1987.
- [Picard] Picard, J. : *Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio*. 1986 - SIAM J. Appl. Math. (46),6,1098-1125.
- [Picard] Picard, J. : *Asymptotic study of estimation problems with small observation noise*, dans *Stochastic Modelling and Filtering* (Rome 1984), Lect. Notes in Control and Inf. Sci. 91, Springer, 1987.
- [Picard] Picard, J. : *Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées*, Proc. 7th Int. Conf. on Analysis and Optimization of Systems (Antibes 1986), Lect. N. in Control and Information Sciences, 83, Springer 1986.

[Picard]

Picard, J. : *Nonlinear filtering and smoothing with high signal-to-noise ratio*, Stochastic Processes in Physics and Engineering (Bielefeld 1986), Reidel 1988.

## A Version discrète du théorème de Girsanov

Considérons une filtration  $(\mathcal{F}_k)_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ .

Soient:

- $\{w_k\}$  un  $\mathcal{F}_k$ -bruit blanc gaussien pour la probabilité  $P$ .
- $\{\varphi_k\}$  un processus  $\mathcal{F}_{k-1}$ -mesurable (i.e. prévisible) tel que:

$$\sum_{i=0}^K |\varphi_i|^2 < \infty \quad (P \text{ p.s.})$$

- $\{Z_k\}$  le processus défini par:

$$\begin{aligned} Z_k &= \exp\left\{\sum_{i=1}^k \varphi_i w_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\varphi_i|^2\right\}, \quad k \geq 1 \\ Z_0 &= 1. \end{aligned}$$

Alors,

1.  $\{Z_k\}$  est une martingale discrète.

**Preuve**

$$\begin{aligned} E[Z_k | \mathcal{F}_{k-1}] &= E[Z_{k-1} \frac{Z_k}{Z_{k-1}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= Z_{k-1} E[\exp\{\varphi_k w_k - \frac{1}{2} |\varphi_k|^2\} | \mathcal{F}_{k-1}], \\ &\quad \text{puisque } Z_{k-1} \text{ est } \mathcal{F}_{k-1}\text{-mesurable.} \\ &= Z_{k-1}, \\ &\quad \text{puisque } \{w_k\} \text{ est un b.b. gaussien et } \varphi_k \text{ est } \mathcal{F}_{k-1}\text{-mesurable.} \end{aligned}$$

et  $Z_k$  est  $\mathcal{F}_k$  intégrable.

■

On considère la probabilité  $\bar{P}$  définie par:

$$d\bar{P}(\omega) = Z_K(\omega) dP(\omega). \quad (46)$$

### Remarque A.1

Du fait que  $\{Z_k\}$  est une martingale, vient que:

$$\frac{d\bar{P}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_k} = Z_k.$$

## 2. (Version discrète du Théorème de Girsanov)

Pour la probabilité  $\bar{P}$  définie dans (46), le processus  $\{\bar{w}_k\}$  défini par:

$$\bar{w}_k = w_k - \varphi_k$$

est un b.b. gaussien .

### Preuve

On veut démontrer que:

$$\bar{E}[\exp(\lambda \bar{w}_k) | \mathcal{F}_{k-1}] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\bar{E}[\exp(\lambda \bar{w}_k - \frac{\lambda^2}{2}) | \mathcal{F}_{k-1}] = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \bar{E}[\exp(\lambda \bar{w}_k - \frac{\lambda^2}{2}) | \mathcal{F}_{k-1}] &= \frac{E[\exp(\lambda \bar{w}_k - \frac{\lambda^2}{2}) Z_k | \mathcal{F}_{k-1}]}{E[Z_k | \mathcal{F}_{k-1}]} \quad (\text{formule de Bayes}) \\ &= \frac{E[\exp(\lambda w_k - \lambda \varphi_k - \frac{\lambda^2}{2}) Z_k | \mathcal{F}_{k-1}]}{Z_{k-1}}, \end{aligned}$$

puisque  $Z_k$  est une martingale et d'après la remarque ci dessus.

$$\begin{aligned} &= E[\exp(\lambda w_k - \lambda \varphi_k - \frac{\lambda^2}{2}) \exp(\varphi_k w_k - \frac{1}{2} \varphi_k^2) | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= E\{\exp[(\lambda + \varphi_k) w_k - \frac{1}{2}(\lambda + \varphi_k)^2] | \mathcal{F}_{k-1}\} \\ &= 1, \text{ de même qu'en 1. .} \end{aligned}$$

■



## B Estimation du premier terme dans l'expression (30)

Dans le contexte du paragraphe sur l'expression asymptotique de  $X_k - M_k$ , dans la section 3.1.2, soit

$$S_k \triangleq \sum_{i=2}^k (X_{i-1} - M_{i-1})(X_{i-1} - X_{i-2}) h''(X_{i-2}) Z_{k-1, i-2}$$

(  $S_k$  est  $\mathcal{F}_{k-1}$  - mesurable )

$$S_0 \triangleq 0 .$$

Notre but est de majorer  $E|S_k|$ .

On établit le résultat suivant:

**Lemme B.1** *On a l'estimation*

$$E(S_{k+1}^2) \leq c\varepsilon \exp\left\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\right\} + c\varepsilon^2 .$$

**Preuve**

**Notation:**

Dans la suite,  $P_{k-1}$  désignera la partie  $\mathcal{F}_{k-1}$ -mesurable de  $X_k - M_k$  i.e.

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= (X_{k-1} - M_{k-1}) + \Delta t [b(X_{k-1}) - b(M_{k-1})] \\ &\quad - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} [h(X_{k-1}) - h(M_{k-1})] \\ X_k - M_k &= P_{k-1} + \sigma \sqrt{\Delta t} (w_k - v_k) . \end{aligned}$$

D'après la définition de  $S_k$ , ci dessus, on a que

$$S_{k+1} = S_k + (X_k - M_k)(X_k - X_{k-1}) h''(X_{k-1}) Z_{k, k-1} .$$

• On commence par estimer le facteur de  $Z_{k, k-1}$  dans cette expression:

$$\begin{aligned} &E[(X_k - M_k)^2 (X_k - X_{k-1})^2 h''^2(X_{k-1})] \\ &= \Delta t^2 E[(X_k - M_k)^2 b^2(X_{k-1}) h''^2(X_{k-1})] \\ &\quad + \sigma^2 \Delta t E[(X_k - M_k)^2 w_k^2(X_{k-1}) h''^2(X_{k-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sigma \Delta t^{3/2} E[(X_k - M_k)^2 b(X_{k-1}) w_k h''(X_{k-1})] \\
& \leq c \Delta t E(P_{k-1}^2) + c \Delta t^2 [1 + c E[(X_k - M_k)^2] + c E[|P_{k-1}|]] \\
& \leq c \Delta t [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2k} + c\varepsilon],
\end{aligned}$$

puisque

$$E(P_{k-1}^2) \leq E[(X_k - M_k)^2] \leq [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2k} + c\varepsilon].$$

• On estime le facteur  $S_k(X_k - M_k)(X_k - X_{k-1})h''(X_{k-1})$ :

$$\begin{aligned}
& E[S_k(X_k - M_k)(X_k - X_{k-1})h''(X_{k-1})] \\
& = \Delta t E[b(X_{k-1})h''(X_{k-1})S_k(X_k - M_k)] \\
& \quad + \sigma \sqrt{\Delta t} E[b(X_{k-1})h''(X_{k-1})S_k(X_k - M_k)w_k] \\
& \leq c \Delta t (E(S_k^2))^{1/2} (E[(X_k - M_k)^2])^{1/2} + c \Delta t (E(S_k^2))^{1/2} \\
& \leq \frac{c_h}{2} \frac{\Delta t}{\varepsilon} E(S_k^2) + c \Delta t [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2k} + c\varepsilon].
\end{aligned}$$

On obtient enfin la majoration:

$$\begin{aligned}
& E(S_{k+1}^2) \\
& \leq (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-2} \{ (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon}) E(S_k^2) \\
& \quad + c \Delta t [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2k} + c\varepsilon] \} \\
& \leq c \Delta t (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-2} \sum_{i=0}^{k-1} [(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon}) - \|b'\| \Delta t)^{-2} (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon})^i \\
& \quad \cdot [(1 - c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \|b'\| \Delta t)^{2(k-i)} + c\varepsilon] \\
& \leq c \Delta t (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-2} \left[ \frac{1 + c_h \Delta t/\varepsilon}{(1 + c_h \Delta t/\varepsilon - \|b'\| \Delta t)^2} \right]^k \sum_{i=1}^k \left[ \frac{[1 - (c_h \Delta t/\varepsilon - \|b'\| \Delta t)^2]^2}{1 + c_h \Delta t/\varepsilon} \right]^i \\
& \quad + c\varepsilon \Delta t (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^{-2} \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \frac{1 + c_h \Delta t/\varepsilon}{(1 + c_h \Delta t/\varepsilon - \|b'\| \Delta t)^2} \right]^i.
\end{aligned}$$

Or

$$(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^2 - (1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon}) \geq c \frac{\Delta t}{\varepsilon} > 0$$

et

$$(1 + c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon}) - [1 - (c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \|b'\| \Delta t)^2]^2 \geq c_h \frac{\Delta t}{\varepsilon} > 0$$

donc

$$E(S_{k+1}^2) \leq c \varepsilon \exp\{-c \frac{t_k}{\varepsilon}\} + c \varepsilon^2 .$$

■

